



非線形発振器結合系の結合方式と 分岐現象に関する研究

2007年 3月

西内 悠祐

目次

第1章 まえがき	1
第2章 BVP 発振器	3
2.1 回路構成	3
2.2 正規化方程式	4
2.3 BVP 発振器の分岐構造	5
2.4 BVP 発振器への電流の印加	8
第3章 BVP 発振器を拡張した回路	11
3.1 変形 BVP 発振器	11
3.1.1 変形 BVP 発振器の分岐構造	12
3.1.2 変形 BVP 発振器でみられる特異な現象	14
3.1.3 非線形抵抗の設計とトーラス	18
3.2 簡略化 v - i 結合 BVP 発振器	24
3.2.1 簡略化 v - i 結合 BVP 発振器で起こる分岐現象	25
3.2.2 簡略化 v - i 結合 BVP 発振器の特徴	25
第4章 線形抵抗で結合した BVP 発振器	27
4.1 電圧結合	27
4.1.1 電圧結合で生じる分岐現象	28
4.1.1.1 平衡点の分岐	28
4.1.1.2 リミットサイクルの分岐	30
4.1.2 電圧結合の特徴	31
4.2 電流結合 BVP 発振器	34
4.2.1 電流結合で生じる分岐	36
4.2.1.1 平衡点の分岐	36
4.2.1.2 リミットサイクルの分岐	36
4.2.2 電流結合の特徴	37
4.3 非対称結合 BVP 発振器	39
4.3.1 非対称結合で生じる分岐	40
4.3.1.1 平衡点の分岐	40
4.3.1.2 リミットサイクルの分岐	41
4.3.2 非対称結合の特徴	42
4.4 交差結合 BVP 発振器	44
4.4.1 交差結合 BVP 発振器で生じる分岐	45
4.4.2 交差結合の特徴	45
第5章 キャパシタで結合した BVP 発振器	49
5.1 電圧結合 BVP 発振器	49
5.1.1 キャパシタ結合で生じる分岐	50

5.1.2	キャパシタ結合の特徴	51
第 6 章	まとめ	53
付録		55
A	非線形力学系にみられる分岐	55
A.1	平衡点の安定性	55
A.2	平衡点の分岐	56
A.2.1	Saddle-Node 分岐	57
A.2.2	Hopf 分岐	57
A.2.3	D 型分岐	57
A.3	周期解の安定性	58
A.4	Poincaré 写像の固定点の安定性	59
A.5	周期解の分岐	62
A.5.1	接線分岐 (tangent bifurcation)	63
A.5.2	周期倍分岐 (period doubling bifurcation)	63
A.5.3	ネイマルク・サッカー分岐 (Neimark-Sacker bifurcation)	63
謝辞		64
文献		65

第1章

まえがき

生体における様々な機能・メカニズムを解明する手段として、特定の機能に対応した数理モデルの同定が挙げられる [1]. そのモデルの動力学的な性質の解析を行うことにより、機能の仕組みの理解や同定そのものの正当性の検証が行おうとするものであるが、このような数理的、工学的アプローチは、ノイズや不要な要素からの影響が排除されるため、環境や性質を自由に設定することができ、生理学的実験では難しい詳細な解析を行える特徴をもつ。また、試行錯誤が容易なため効率よい探索的戦略も立てられることから、系がもつ新機能の発掘が期待できる。

ところで、生体における脳・神経系では、スパイクと呼ばれる神経細胞におけるパルス状の膜電位変化が伝搬することによって情報の伝達が行われており、このスパイクの連続、つまり膜電位の振動現象とその頻度が情報処理、情報表現のメカニズムと関係があると考えられている [2]. そのため近年では、生理学的実験と対応した単体ニューロンの数理モデルを設計し、モデルの結合からそのメカニズムを解明しようとする研究が盛んに行われている [3]. また、神経細胞の振る舞いだけでなく、サーカディアンリズム等の生体におけるリズム現象のメカニズムに対しても振動モデルの構築と解析が行われることから、生体モデルの解析において振動子モデルが重要な要素の一つであると言える [4].

本論文ではこの振動モデルに着目し、簡素な振動モデルとその拡張モデルや結合モデルから分岐構造を調べることによって、システムの特徴・性質がどのように変化するかを調べる。具体的には、神経細胞の振る舞いを単純化した 2 階自律系発振器である BVP モデルを用いる。実際に BVP 回路に素子を追加したモデルや BVP 回路同士を結合したモデルの解析を行う。これら拡張・結合した BVP 発振器は、生体における現象だけでなく、水や油界面膜系等の自然界で起こる非線形現象をモデル化した回路でもあり、この回路の特性を調べることで、他のシステムにおいて導出されたモデルに対しても、拡張・結合項の与える影響を考察することができる。

BVP 発振器は簡素なシステムであるため、基本的な発振システムとして用いられることが多く、現在までの研究で BVP 発振器の拡張モデルや結合モデルがいくつか解析されている [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. しかし、これらの解析において仮定されている非線形性は互いに異なるため、分岐構造に違いが表れ、単純にこれらの特徴を比較することができない。また、解析した発振器の状態が異なる場合や回路方程式の正規化手法が異なる場合も同様に、分岐構造の違いが表れるため、結合や拡張の特徴を分岐構造の形状や性質から考察することが難しい。そこで本論文では、二つの全く同一な構成・パラメータの BVP 発振器を結合したモデルを考え、単体の BVP 発振器や拡張した BVP 発振器と合わせて正

規化の手法を統一し、観測されるアトラクタや分岐構造の違いからこれらの特徴を考察する。また、本論文では今までの研究で検討されていない、同一 BVP 発振器をキャパシタで結合した系における分岐解析を行う。そして、線形抵抗で結合した場合の特徴と比較することで、結合素子にキャパシタを用いた場合の特徴についても考察を行う。

本論文は、6 章からなる。第 2 章以降の各章の概要を以下にまとめる：

- 第 2 章で BVP 発振器の回路構成、方程式を示し、BVP 発振器でみられる状態と分岐現象について述べる。また、BVP 発振器に外部から電流が付加された場合の分岐構造や状態の変化について述べる。
- 第 3 章では、BVP 発振器を拡張した回路について述べる。単体の BVP 発振器に回路素子を追加することで起こった分岐構造の変化や、BVP 発振器単体では発生しなかった特徴的な現象について示す。
- 第 4 章では、線形抵抗で 2 つの BVP 発振器を結合した場合について述べる。具体的には、BVP 発振器の各ポートを 1 つ、もしくは 2 つの線形抵抗で結合したモデルについて、分岐図を求め、各結合発振器で観測されるのアトラクタや同期現象について解析を行う。また、各結合発振器でみられるアトラクタと分岐現象の相似点、相違点を示し、結合様式が分岐に与える影響に関して考察する。
- 第 5 章では、キャパシタを用いて 2 つの BVP 発振器を結合した発振器について述べる。結合発振器のアトラクタと分岐を求め、線形抵抗で結合した場合と比較し、結合にキャパシタを用いた場合の特徴について考察する。
- 第 6 章では、本論文のまとめを述べる。

第2章

BVP 発振器

BVP 方程式は、FitzHugh が提案した神経振動子モデルであり、4次元自律系である Hodgkin-Huxley 方程式を簡略化して得られた2次元自律系方程式である [14]。BVP 発振器は簡素な電気回路で実現可能でありながら、Hopf 分岐から起こる振動現象だけでなく、ホモクリニック軌道や接線分岐など、パラメータを変化させることによって様々な非線形現象が観測できる。BVP 発振器は神経系の興奮性ダイナミクスを再現した簡素なシステムであるため、単純な発振回路としての応用だけではなく、実際の神経細胞に近い振る舞いを再現するための改良や、多数の BVP 発振器を結合した大規模結合系モデルのシミュレーション等が行われている [3]。

本章では、単体 BVP 発振器で起こる分岐現象と発振器の状態について説明する。BVP 発振器の回路構成、回路方程式を示し、この発振器で観測される現象について説明する。また、BVP 発振器が持つ2つの接続ポートに着目し、各ポートによって外部から電流が入力された場合について、発振器の状態がどのような影響を受けるか分岐図を求め詳しく説明する。

2.1 回路構成

Bonhoffer - van der Pol (以下、BVP) 方程式はFitzHugh が提案した神経振動子モデルであり、4次元自律系システムである Hodgkin-Huxley モデルから興奮性ダイナミクスを抽出して得られた2階自律系方程式である [14]。電気回路のアナロジーは、図 2.1 で示した、抵抗、キャパシタ、インダクタ、非線形抵抗の並列接続回路モデルとなる。

BVP 発振器は2つの接続ポートを持ち、それぞれのポートからは電圧と電流を取り出すことができる。BVP 発振器同士を結合する場合、どのポートを接続するかによって違った特徴を持つ結合発振器を作ることが出来る。

$$\begin{cases} C \frac{dv}{dt} = -i - g(v) \\ L \frac{di}{dt} = v - ri \end{cases} \quad (2.1)$$

本研究では非線形抵抗として FET を使用する。図 2.2 に非線形抵抗の回路図を示す。非線形抵抗の特性は図中の線形抵抗 R によって変更する。図 2.3 は非線形抵抗の特性を示した図である。本研究では

$$g(v) = -a \tanh bv \quad (2.2)$$

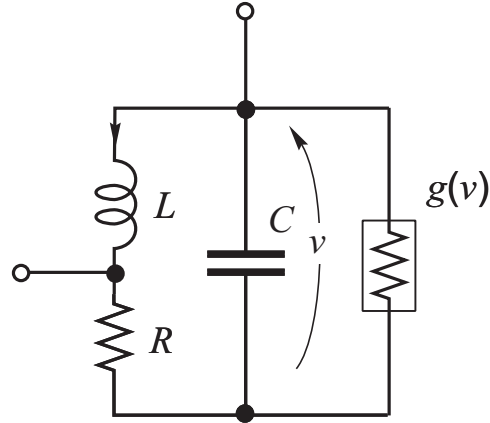


図 2.1 BVP 発振器の回路図

という式を用いて非線形抵抗の特性を近似している.

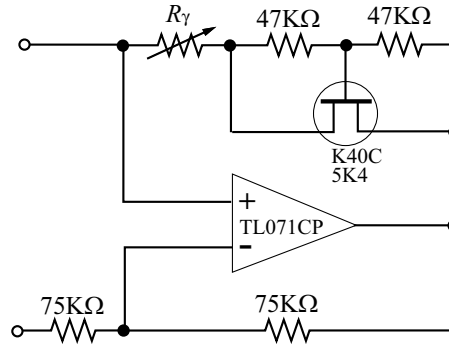


図 2.2 FET を用いた非線形抵抗回路

2.2 正規化方程式

式 (2.3) は式 (2.2) を用いて回路方程式 (2.1) を正規化した式である.

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -y + \tanh \gamma x \\ \frac{dy}{d\tau} = x - ky \end{cases} \quad (2.3)$$

このとき,

$$t = \sqrt{LC}\tau, \quad v = a\sqrt{\frac{L}{C}}x, \quad i = ay, \quad \gamma = ab\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad k = r\sqrt{\frac{C}{L}}$$

となる.

式 (2.3) の x と y は電圧, 電流を表した状態変数であり, γ は非線形抵抗の特性, δ は線形抵抗に関するパラメータとなっている.

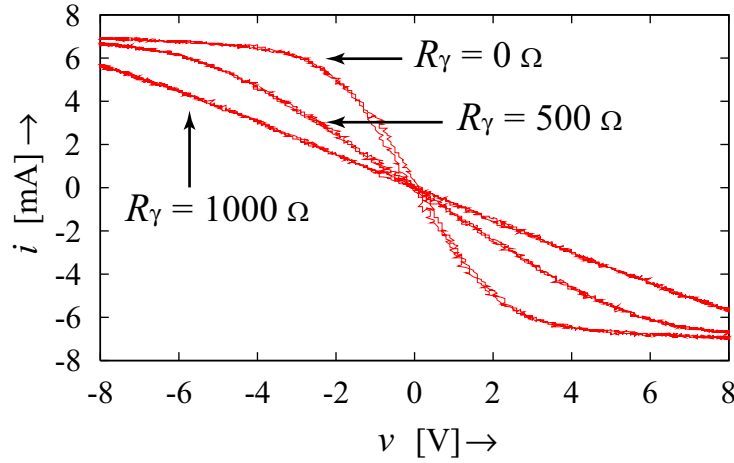
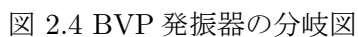


図 2.3 非線形抵抗回路の特性

2.3 BVP 発振器の分岐構造

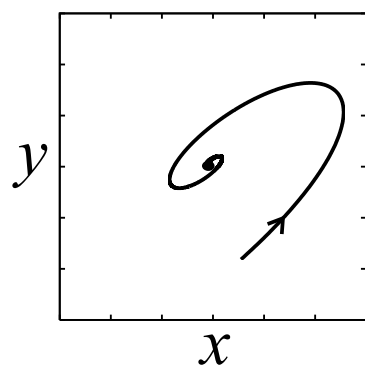
図 2.4 に式 (2.3) の分岐図を示す. BVP 発振器はパラメータを変更することで安定な発振状態や無発振状態へと変化する. パラメータ k を 1 より小さい値とし, γ を 0 から増加させることでパラメータ領域 (a) から (e) 全ての状態を観測することができる. (本論文中では $k = 0.82$ という値を用いることが多い) γ を増加させたときの各領域における発振器の状態と発生する分岐を以下に示す.

- 領域 (a): 安定な平衡点が 1 つだけ存在する状態. 軌道は全て原点へと収束する. (図 2.5(1))
- 分岐 h_0 : 原点がスーパークリティカルな Hopf 分岐を起こし, 安定なリミットサイクルが発生する.
- 領域 (b): 原点が完全不安定な平衡点となり, 安定なリミットサイクルが存在する状態. 軌道は全てリミットサイクルへと収束し発振状態となる. (図 2.5(2))
- 分岐 d : D 型分枝により原点がサドルとなり, 対称な位置に二つの完全不安定な平衡点が発生する.
- 領域 (c): 三つの平衡点と安定なリミットサイクルが存在する状態. 三つの平衡点は全て不安定であるため, 軌道はリミットサイクルへと収束する. (図 2.5(3))
- 分岐 h_1 : 原点对称な位置にある二つの完全不安定平衡点が Hopf 分岐を起こし, 完全安定な平衡点へと変化する. また, 分岐を起こした平衡点の周辺には不安定なリミットサイクルが発生する.
- 領域 (d): 安定な二つの平衡点とリミットサイクルが共存している状態. 解軌道は初期値によって平衡点かリミットサイクルのどちらかへと収束する. (図 2.5(4))
- 分岐 H : ホモクリニック分岐が発生し, 二つの不安定なリミットサイクルが癒着し, 一つの不安定なリミットサイクルへと変化する. (図 2.5(5))
- 分岐 G : 不安定なリミットサイクルと安定なリミットサイクルが接線分岐により癒着

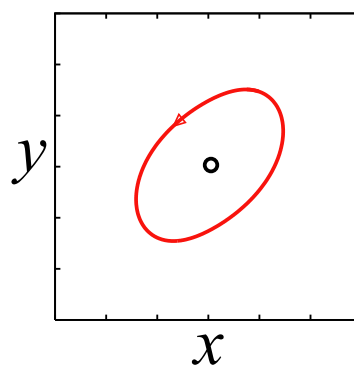


- 領域 (e): 原点のサドルと対称な位置にある二つの安定な平衡点だけの状態. 軌道は安定な平衡点のどちらかに収束する. (図 2.5(7))

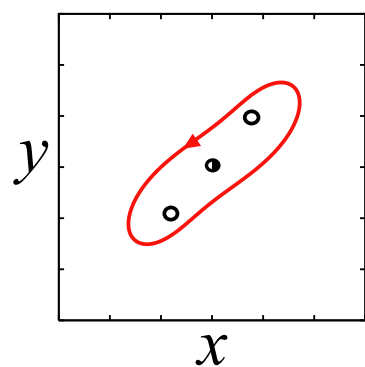
図 2.4 中で (b), (c), (d) の領域は安定なリミットサイクルが存在する，回路が発振状態となるパラメータ領域である．更に領域 (d) では安定な平衡点が共存している．そのため，発振する状態と発振しない状態の両方観測でき，この状態における回路の発振は硬い発振と呼ばれる．



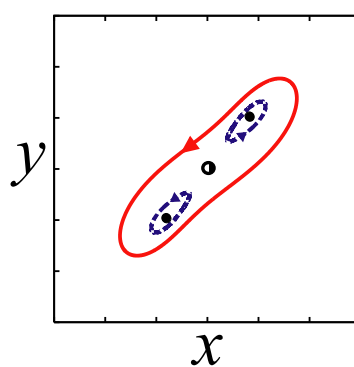
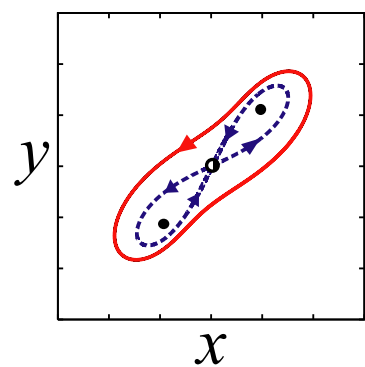
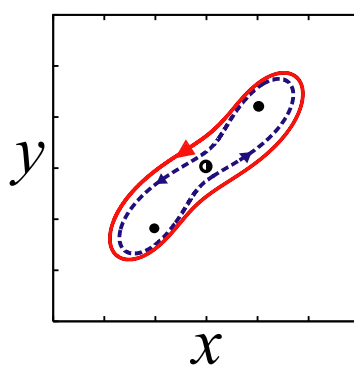
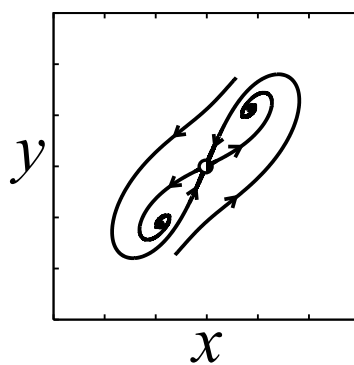
(1):領域 (a)



(2):領域 (b)



(3):領域 (c)

(4):領域 (d) Hopf 分岐 h_1 直後(5):領域 (d) ホモクリニック分岐 H 上(6):領域 (d) 接線分岐 G 直前

(7):領域 (e)

図 2.5 各パラメータ領域におけるシステムの状態

2.4 BVP 発振器への電流の印加

図 2.1 の各ポートに外部から接続がある場合、各ポートから電流の流入もしくは流出が起こる．BVP 発振器に一定の電流が流れ込むと仮定した場合、方程式は式 (2.4) となる． I_x は電圧ポートからの電流， I_y は電流ポートからの電流を意味する．

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -y + \tanh \gamma x + I_x \\ \frac{dy}{d\tau} = x - ky + I_y \end{cases} \quad (2.4)$$

図 2.6 は式 (2.3) のナルクラインを示した図であり、BVP 発振器の状態はナルクラインの交点と傾きによって決定する．つまり、各項に電流が印加された場合、それぞれのナルクラインは上下に平行移動することになる．従ってシステムの状態に関して、式 (2.4) の I_x を増加させることは、 $\frac{I_y}{k}$ を同じ値だけ減少させることと等価である．

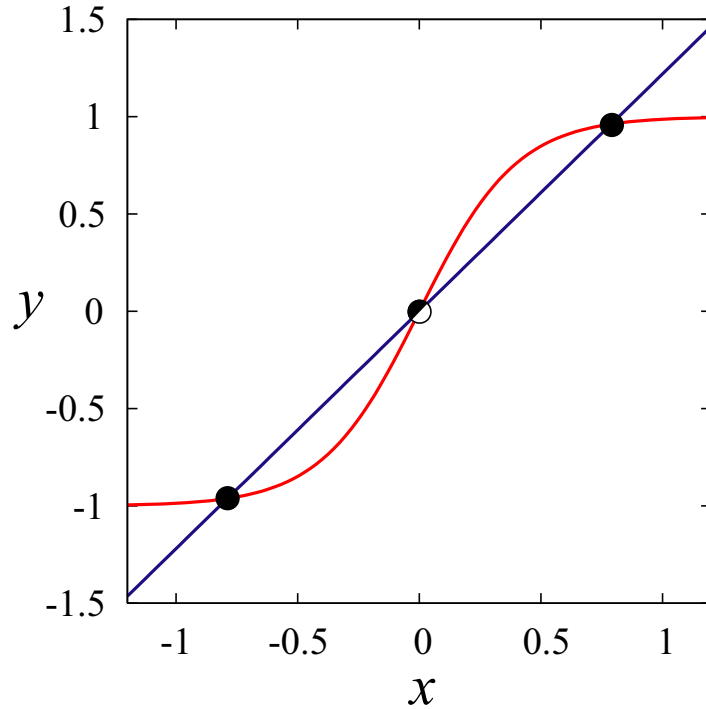
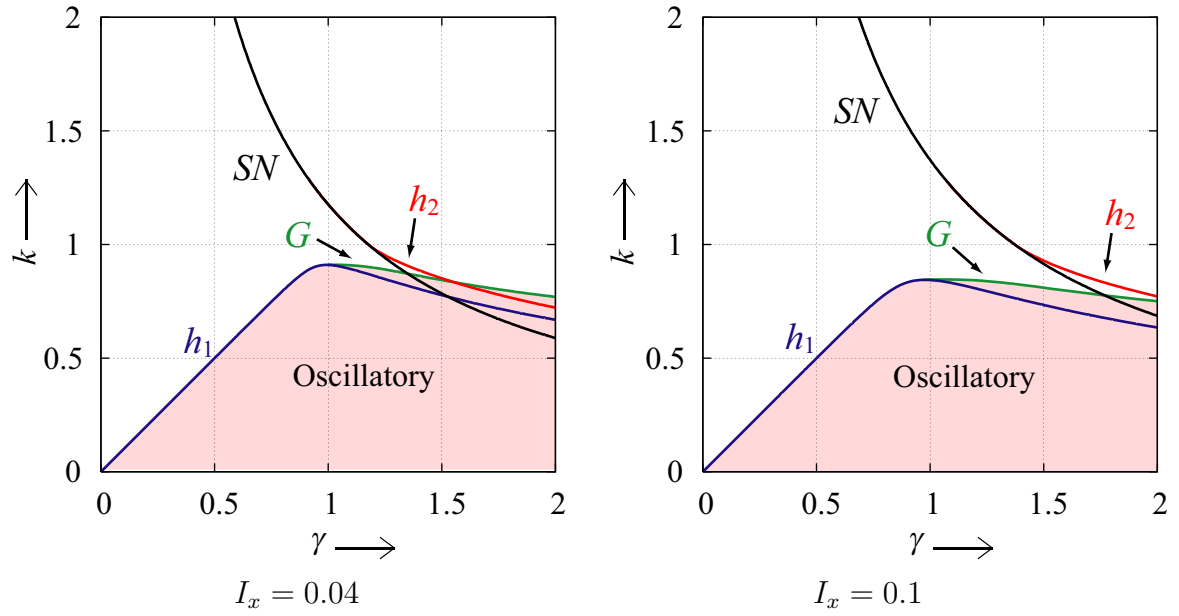
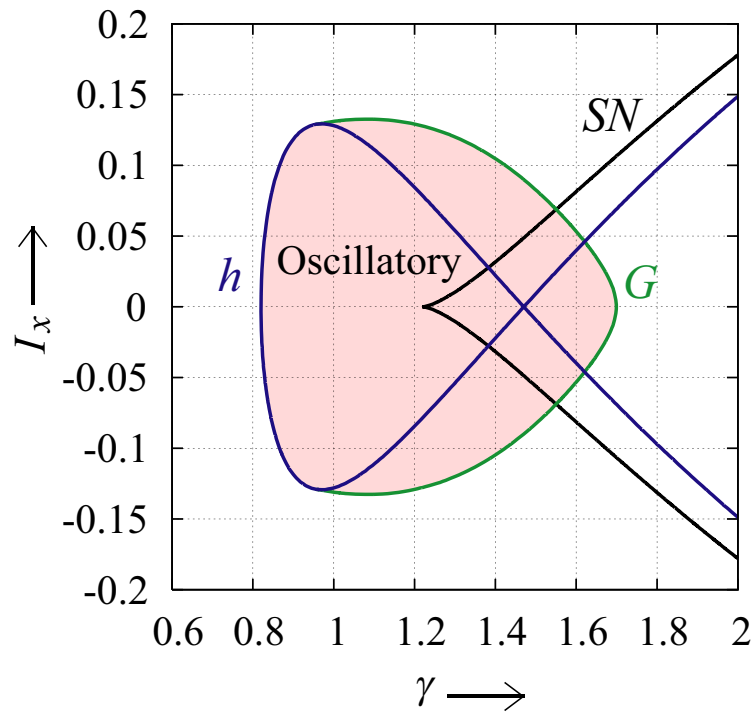


図 2.6 BVP 発振器のナルクライン

図 2.7 に式 (2.4) の分岐図を示す． I_x が入ることで対称性が崩れ、D 型分子が消えサドルノード分岐 SN が発生する．図 2.4 と同様に Hopf 分岐 h_0 と接線分岐 G で囲まれた領域の内側で発振現象が発生するが、外部からの入力 I_x の値を大きくした場合、発振領域は減少する．図 2.8 は $\gamma - I_x$ 平面の分岐図を示した図である．他の分岐図と同様に Hopf 分岐 h で発生したりミットサイクルが接線分岐 G によって消滅する構造になっており、 I_x の値が大きい領域では発振しないことがわかる．接続した素子、もしくは発振器からの電流が印加された場合、パラメータ I_x が上下に変動することとなる．従って、BVP 発振器の状態は入力電流の値によって大きく変化することがわかる．特にパラメータ γ が 0.8 から 1.7 付近では、外部からの入力 I_x によって発振器が発振状態と発振しない状態を変動することが多く、複雑な現象が発生しやすい．

図 2.7 式 (2.4) の分岐図 ($I_y = 0$)図 2.8 $\gamma - I_x$ 平面における式 (2.4) の分岐図 ($(k, I_y) = (0.82, 0)$)

第3章

BVP 発振器を拡張した回路

単体の BVP 発振器では外部との接続を行うポートが2つあるが，本章ではこのポートに素子を接続した回路に起こる現象について述べる．BVP 発振器に素子を加えて作成した回路では，BVP 発振器より次元が大きくなるため，2次元自律系システムである BVP 発振器では存在しなかったカオスアトラクタ等の複雑な現象が多数発生する，本章では，拡張回路で起こる特徴的な現象や分岐構造を調べることによって，拡張された素子が発振器にどのような影響を及ぼすかを考察する．また，BVP 発振器の拡張回路である変形 BVP 発振器でのみ観測される特徴的な現象について，詳しく説明する．

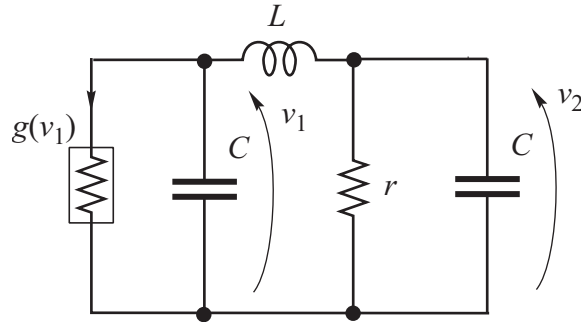


図 3.1 変形 BVP 発振器

3.1 変形 BVP 発振器

図 3.1 は BVP 発振器の電流ポートにキャパシタを追加した拡張回路であり，キャパシタを増やしたことでシステムは3次元となっている．この回路は同様の3次元自律系発振器である Chua 回路とは抵抗とコイルの位置が逆になっている [12]．変形 BVP 発振器の回路方程式を式 (3.1) に示す．本論文では，2つのキャパシタの容量を同じ値とし，追加したキャパシタにかかる電圧を v_2 としている．

$$\begin{cases} C \frac{dv_1}{dt} = -i_1 - g(v_1) \\ C \frac{dv_2}{dt} = i_2 - \frac{v_2}{r} \\ L \frac{di}{dt} = v_1 - v_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\tau} = -z + \tanh \gamma x \\ \frac{dy}{d\tau} = z - \frac{y}{k} \\ \frac{dz}{d\tau} = x - y \end{array} \right. \quad (3.2)$$
$$\begin{aligned}\tau &= \sqrt{LC}\tau, & v_1 &= a\sqrt{\frac{L}{C}}x, & v_2 &= a\sqrt{\frac{L}{C}}y, & i &= az \\ \gamma &= ab\sqrt{\frac{L}{C}}, & k &= r\sqrt{\frac{C}{L}}\end{aligned}$$

3.1.1 変形 BVP 発振器の分岐構造

図 3.2 に式 (3.2) の分岐図を示す. 変形 BVP 発振器の分岐では, 単体の BVP 発振器と同様に分岐曲線が $(\gamma, k) = (1.0, 1.0)$ の点に集中しているという特徴を持つ. また, 変形 BVP 発振器では複数の分岐が同時に発生する現象観測される. 図 3.2 の領域 (b)(c) は発振が観測できる領域であり, 単体 BVP 発振器の場合と同様に, 原点から Hopf 分岐に

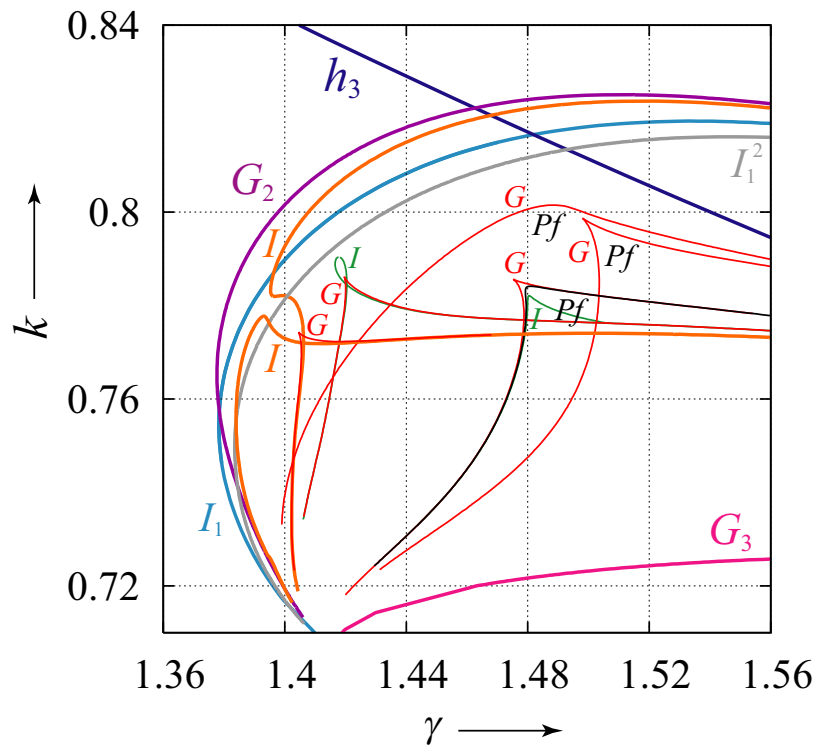


図 3.3 カオスアトラクタが観測される領域の分岐図

よって発生した安定なリミットサイクルが存在している，また，図 3.2 の領域 (a)(d) は発振が観測できない領域であり，原点へと収束する，または原点対象な位置にある 2 つの平衡点のどちらかに収束するという，単体 BVP 発振器と同様の状態が観測できる．

変形 BVP 発振器では単体 BVP 発振器と同様の現象だけでなく，単体 BVP 発振器では存在しなかったカオスアトラクタが発生する．図 3.3 はカオスアトラクタが観測される領域を拡大した分岐図である．図 3.2 領域 (b) の $(\gamma, k) = (1.0, 1.0)$ に近い領域では，原点が Hopf 分岐 h_0 を起こし，更に d_0 によって原点对称な位置に平衡点を発生させる．更に発生した 2 つの平衡点が同時に Hopf 分岐 h_1 を起こす．これらの分岐が同時に起こることにより，Hopf 分岐 h_2 によって発生していた安定なリミットサイクルの内側に，原点对称な位置に安定な二つのリミットサイクルが存在する状態，図 3.4(a) となる．ここから $(\gamma, k) = (1.0, 1.0)$ の点から離れる方向にパラメータを変化させると，図 3.3 の接線分岐 G_2 によって内側の安定なリミットサイクルの近傍にもう一組の安定なリミットサイクルが発生する．これらの安定なリミットサイクルが周期倍分岐連鎖を起こしカオスアトラクタへと変化する (図 3.4(c)(d))．更にパラメータを変化させることによって，これら原点对称な位置にできた二つのカオスアトラクタは一つのカオスアトラクタへと変化する (図 3.4(e))．カオスアトラクタが観測できる領域では，多くの接線分岐が存在しており，これら接線分岐の内側では安定な図 3.4(f) と同様のリミットサイクルが観測できる．この安定なリミットサイクルはパラメータを変化させることにより，ピッチフォーク分岐や周期倍分岐を起こし安定性を失い，カオスアトラクタへと変化する．図 3.3 で観測されるアトラクタ，図 3.4 は接線分岐 G_3 を越えるまでに全て消滅し，接線分岐 G_3 を越えた領域では外

側の大きなリミットサイクル以外のアトラクタは存在しない状態となっている。

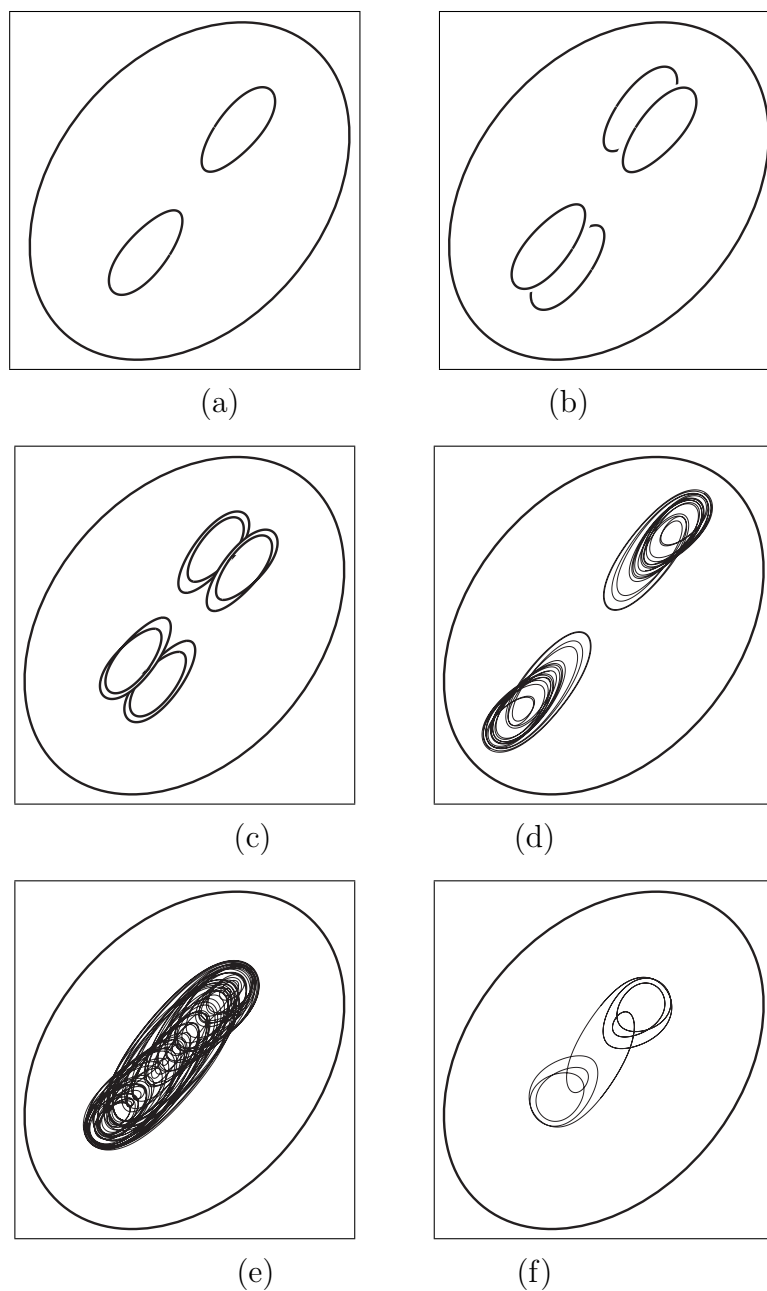


図 3.4 カオスアトラクタへの変化

3.1.2 変形 BVP 発振器でみられる特異な現象

変形 BVP 発振器では、他のシステムではみられない特徴的な現象が存在する．図 3.5 にその特異な応答の解軌道を示す．これは図 3.2 の領域 (d) で観測できる、安定平衡点へと収束するときの過渡応答である．このパラメータ領域では、初期値を原点からある程度大きな値に設定した場合、解軌道は一度原点に吸い込まれた後、安定な平衡点へと飛び出すという特徴的な軌道を描く．これは原点のサドルが持つ安定な多様体平面に解軌道が乗り、原点付近まで吸い込まれた後、不安定多様体によって原点近傍から引き離されるとい

う現象であり、この状態を繰り返すリミットサイクルが Chua 回路でも発生する [12]. しかし、変形 BVP 発振器では、飛び出した解軌道がそのまま安定平衡点へと収束してしまうという違った現象となる. また、この現象は実回路上でも同様に観測することができる.

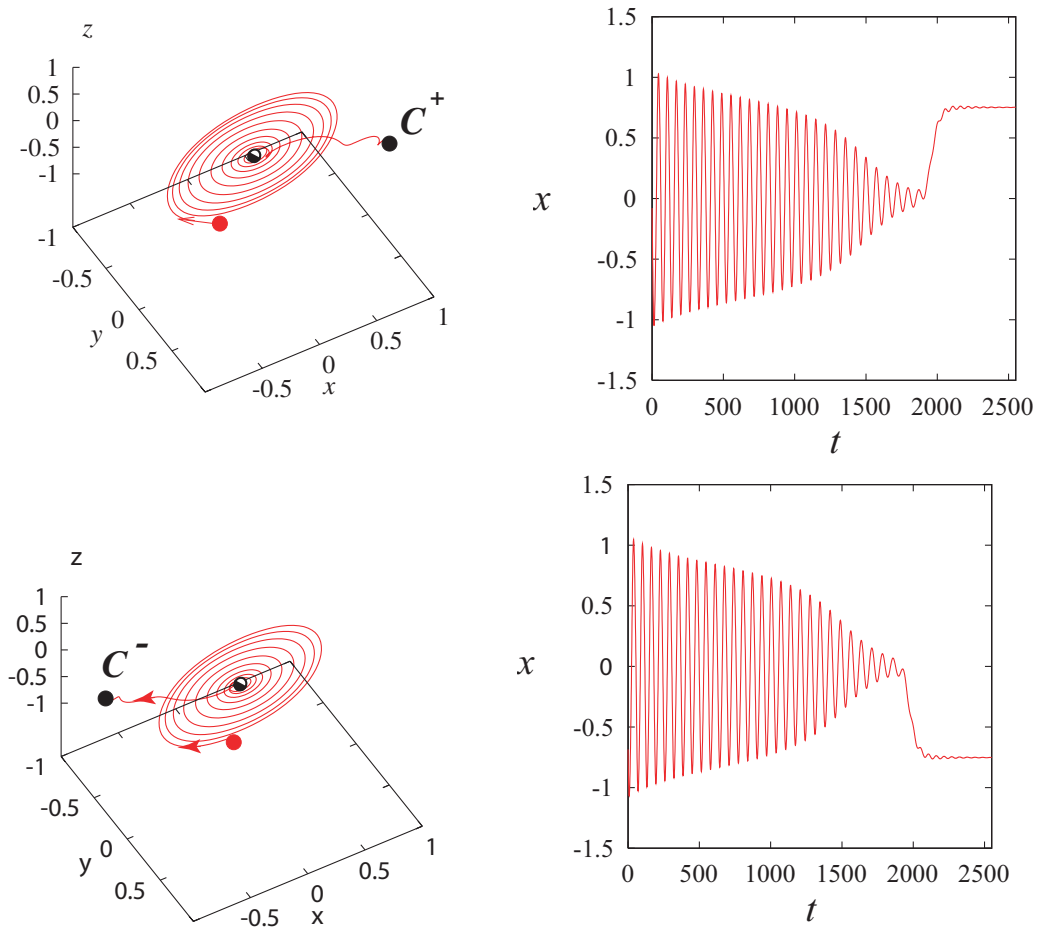


図 3.5 変形 BVP 発振器に存在する特異な現象

この特異な現象では、初期値から最終的に収束する点を推測することが困難である. そこで、初期値空間を最終的に収束するアトラクタによって色分けした basin boundary と呼ばれる図を求めた. 図 3.6 は $z = 0$ の平面における basin boundary を求めた図である. パラメータ k を固定し、 γ を変更したとき、収束するアトラクタを分ける境界である多様体の構造が徐々にぼやけ、消失してしまう現象がみられた. 図 3.7 はこの特異な応答の構造を表した模式図である. 原点から離れた位置にある解軌道は全て発振領域である 図 3.2 (b) (c) にあった安定なリミットサイクルへと収束しようとする. 特異な応答が存在する領域 (d) では安定なリミットサイクルが接線分岐 G_0 によって消滅しているので、安定なリミットサイクルが存在していた位置まで引き寄せられた解軌道は原点へと向かって周回しながら近付き、原点の安定多様体平面に乗る. この構造によって解軌道が多様体平面に乗るという特異な応答を引き起こす. また、basin boundary の境界がぼやけるという現象は、原点のごく近傍を長く周回することによって蓄積された数値計算誤差が原因で起

こっているのではないかと予想できる．図 3.8 は原点の安定多様体平面を構成する固有値の実部を示した図である．共役複素数となる固有値の実部は平衡点へと引き寄せる力の強さを表しており，パラメータが $(\gamma, k) = (1.0, 1.0)$ の点に近づくほど原点に引き寄せる安定多様体の力は弱くなり，原点近傍を解軌道が周回する時間は長くなる．実際にパラメータを変更しながら basin boundary の境界線がぼやける領域，構造が消失する領域を調べたところ，固有値の分布 図 3.8 と似た形で存在していることがわかった．

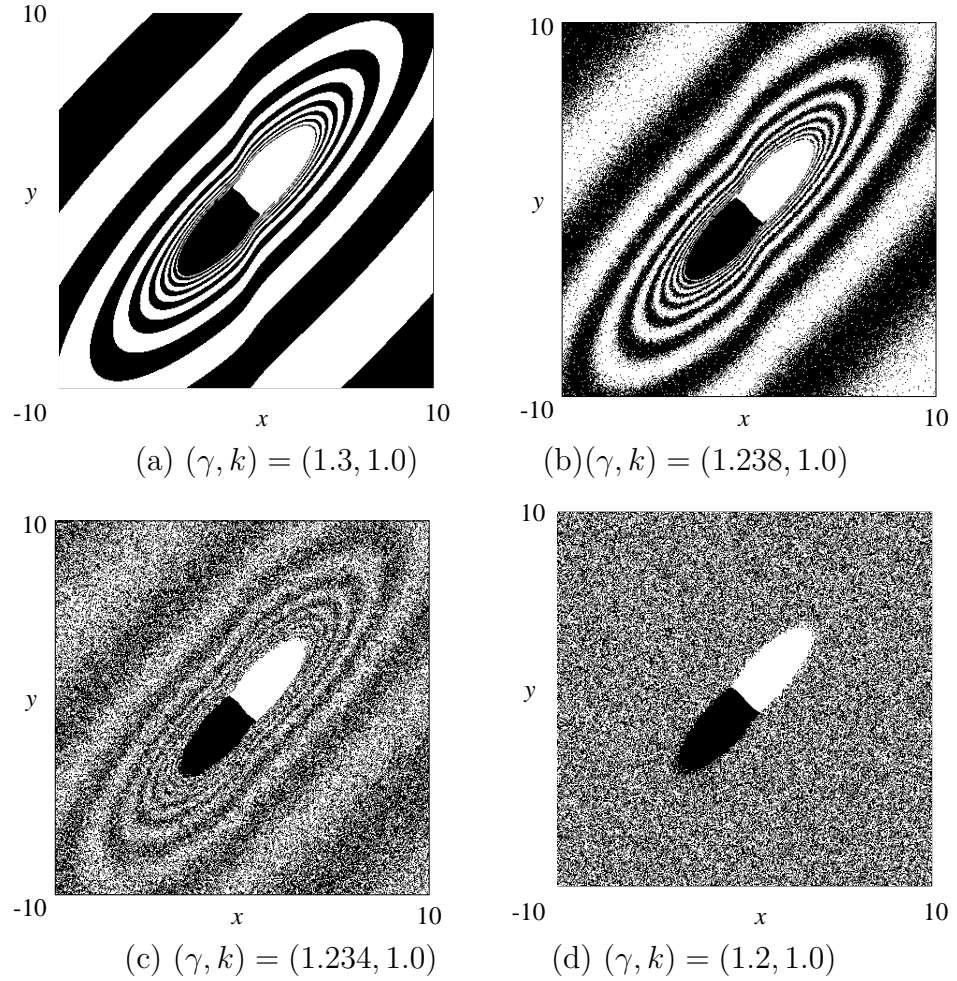


図 3.6 特異な現象の basin boundary ($z = 0$)

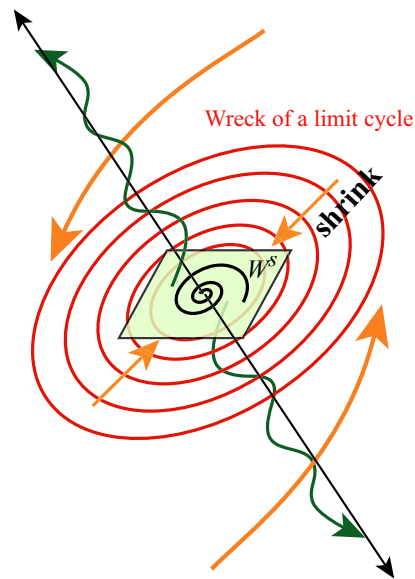


図 3.7 特異な応答の構造

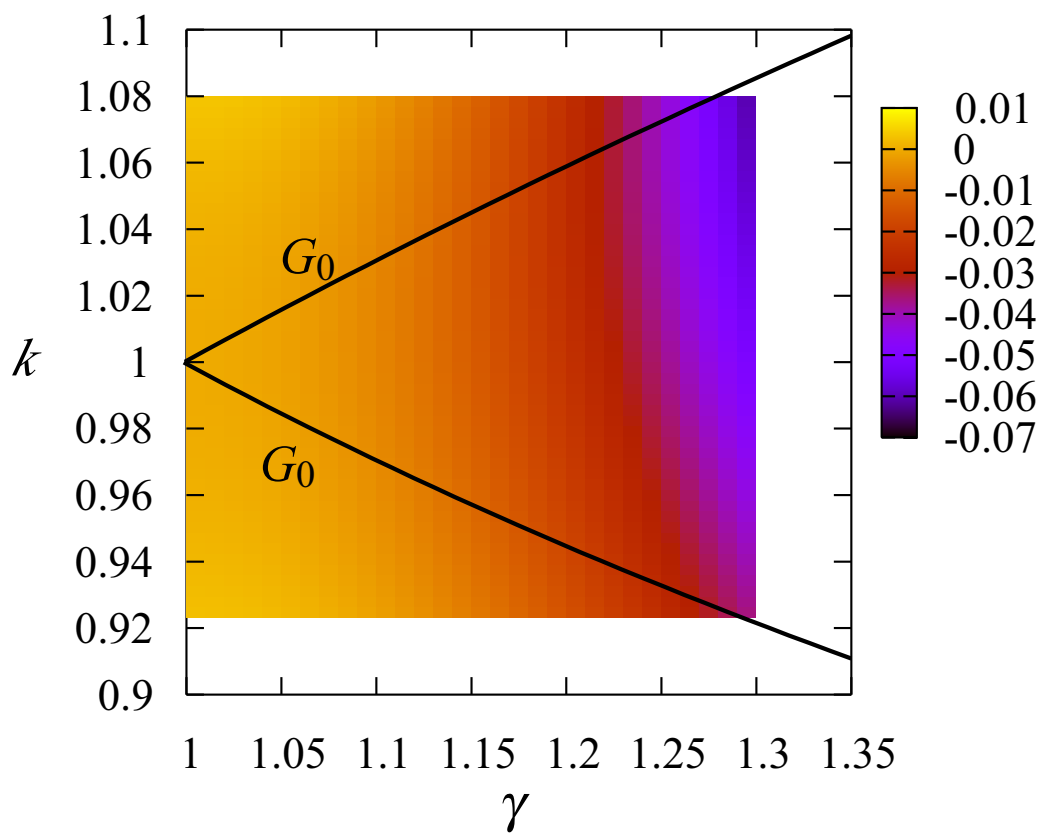


図 3.8 原点の共役複素数となる固有値の実部の値

3.1.3 非線形抵抗の設計とトーラス

変形 BVP 発振器と同じ 3 次元自律系発振器である Chua 発振器では、トーラスと呼ばれる現象が観測できる [12]. また、他に 3 次元自律系回路から生じるトーラスを実回路、シミュレーション共に確認した文献としては、トーラスとトーラス崩壊から変化するカオスを述べた松本らの文献がある [13]. これらは数少ない実回路でトーラスを観測できる 3 次元自律系システムであり、特に松本らの回路では、複雑な回路によって区分線形となる非線形特性を実現している. 変形 BVP 発振器では、これらの回路と違い FET の滑らかな特性を非線形特性として利用しているが、この非線形抵抗回路を少し拡張するだけで、他の回路と同様にトーラスを実回路で発生させることができる.

図 3.9 は Chua 発振器で使用されている非線形抵抗である Chua ダイオードの特性を表した図である. Chua ダイオードは区間によって二つの傾きを持つ区分線形な非線形抵抗とされており、オペアンプとダイオードを用いてこの特性を実現している.

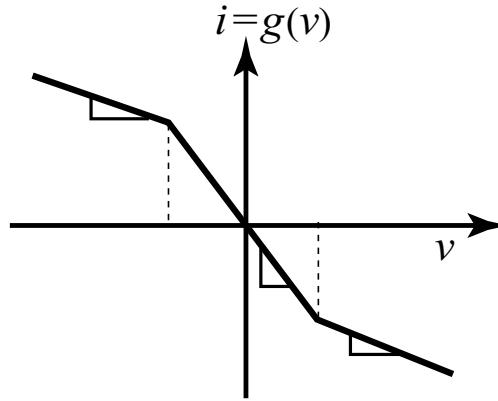


図 3.9 Chua ダイオードの特性

変形 BVP 発振器において、非線形抵抗にこの区分線形な特性を用いた場合、Chua 発振器と同様のトーラス現象を確認することができた. このことから、区分線形特性の持つ、傾きが変化するという特性がトーラス発生の重要な要素であると考え、従来の FET を用いた非線形特性 図 2.2 に線形抵抗を付加することによって、この特性を再現した. 図 3.10 に新たに設計した非線形抵抗の回路とその特性を示す. 元の非線形抵抗回路と同様に、 \tanh を用いこの特性を近似した式が式 (3.3) である.

$$g(v) = -av - b \tanh cv \quad (3.3)$$

この特性では、 av という線形項が付加されているため、元の特性と違い発散してしまう状態が存在する. これはシミュレーションのみで発生する状態であり、実回路ではオペアンプの飽和現象により、発散状態にはならない. 式 (3.3) によって式 (3.1) を正規化したものが式 (3.4) である.

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -z + Ax + \tanh Bx \\ \frac{dy}{d\tau} = z - \frac{y}{k} \\ \frac{dz}{d\tau} = x - y \end{cases} \quad (3.4)$$

このとき,

$$\tau = \sqrt{LC}\tau, \quad v_1 = b\sqrt{\frac{L}{C}}x, \quad v_2 = b\sqrt{\frac{L}{C}}y, \quad i = bz$$

$$A = a\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad B = bc\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad k = r\sqrt{\frac{C}{L}}$$

となり, 式 (3.2) と比べ非線形抵抗を決定するパラメータが γ から A, B という 2 つのパラメータに変更されている.

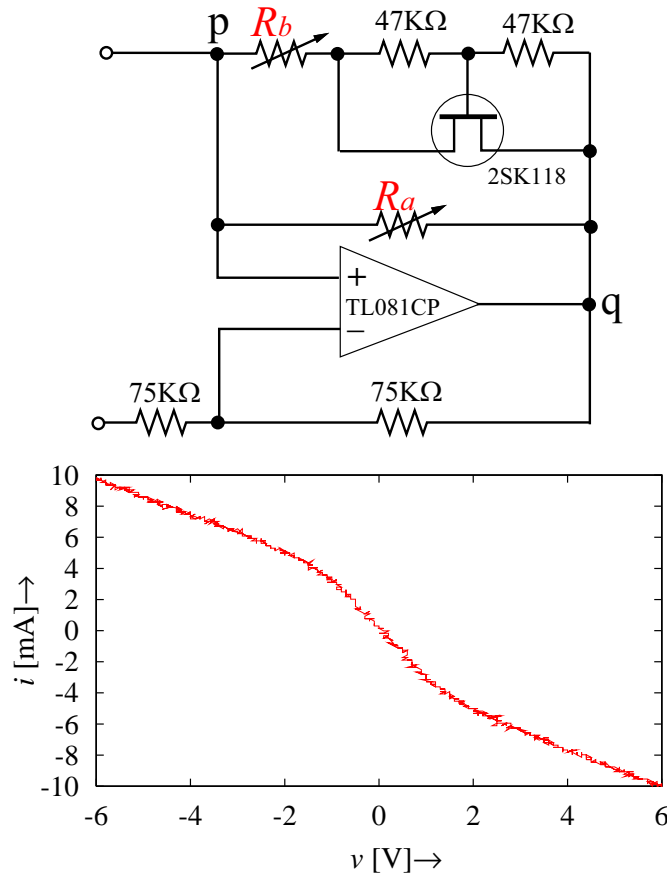


図 3.10 新たに設計した非線形抵抗回路とその特性

式 (3.4) では, 元の式である 式 (3.2) と同じ状態や分岐を観測することができるが, パラメータ A, B によって 図 3.4 (a) の状態から, 内側の二つの安定なリミットサイクルがトーラスへと変化する分岐現象が発生する. 図 3.11 に式 (3.4) で発生するトーラス

とその Poincaré 点を示す.

パラメータ δ を 0.833 と固定し, A - B 平面での分岐図を図 3.12 に示す. 図の領域 (c) から (g) へとパラメータを変化させることによって, Neimark-Sacker 分岐 (以下 NS 分岐) が発生し, この分岐によって図 3.11 のトーラスが発生する. また, 図 3.12 の領域 (g) では, NS 分岐に沿ってアーノルド舌と呼ばれる分岐構造が多数存在する. 図 3.13 に NS 分岐付近を拡大した分岐図を示す. 接線分岐 G と周期倍分岐 I からなるアーノルド舌の内側にパラメータを変化させた場合, トーラスの周期がロックし, 安定なリミットサイクルが観測できる. 図 3.14 にアーノルド舌の内側で観測できる安定なリミットサイクルを示す.

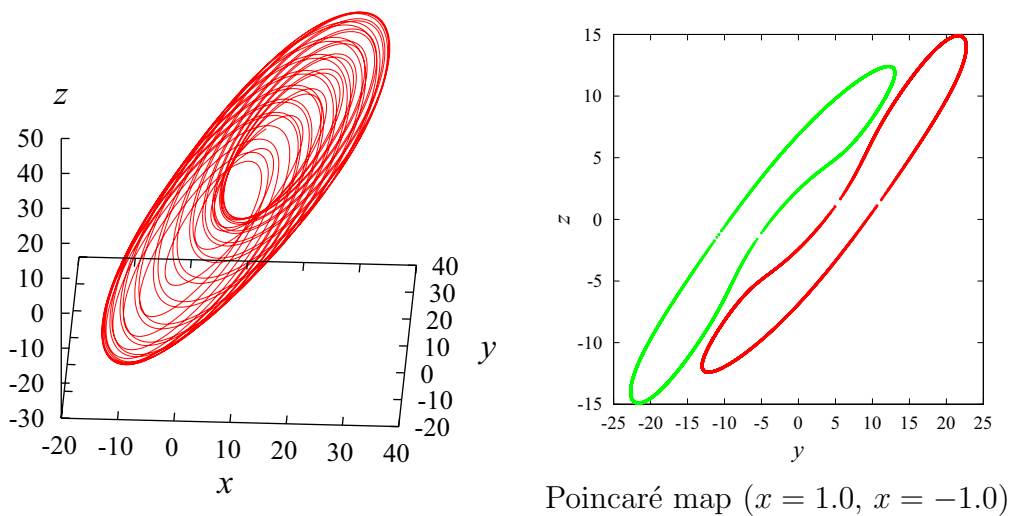


図 3.11 式 (3.4) で発生するトーラス

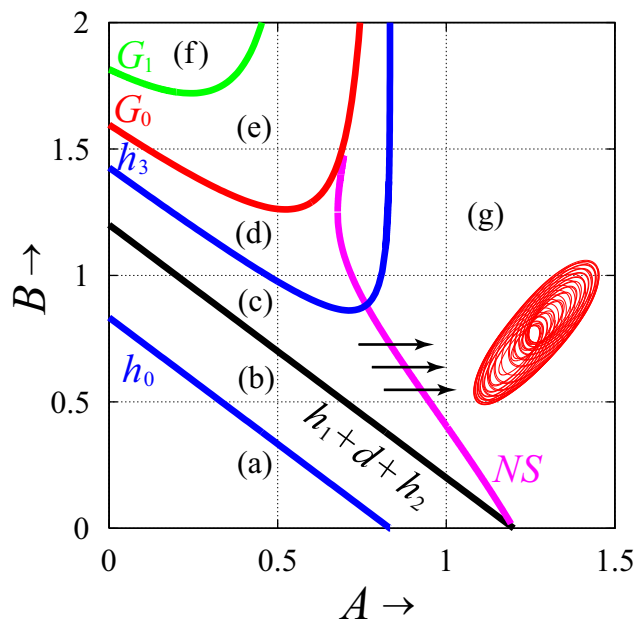


図 3.12 A - B 平面での分岐図

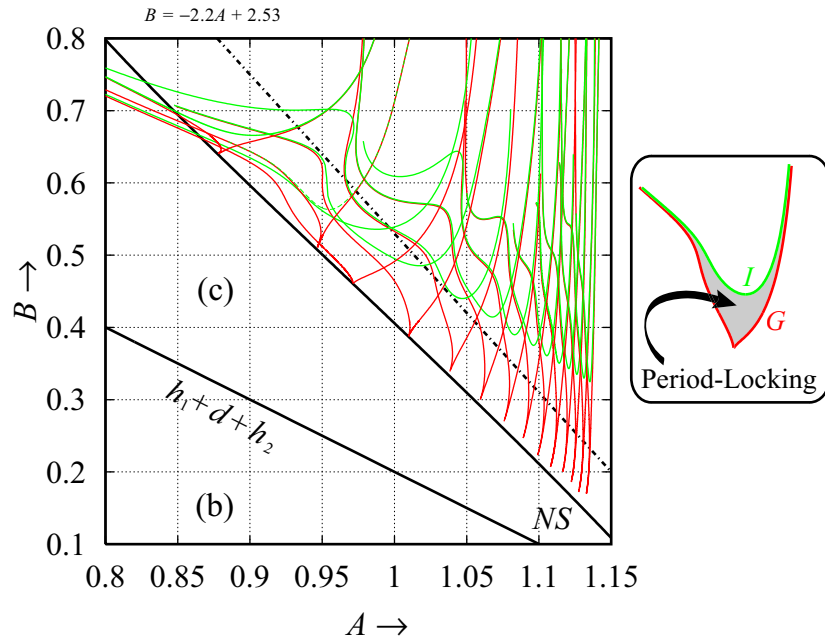


図 3.13 NS 分岐付近の拡大図

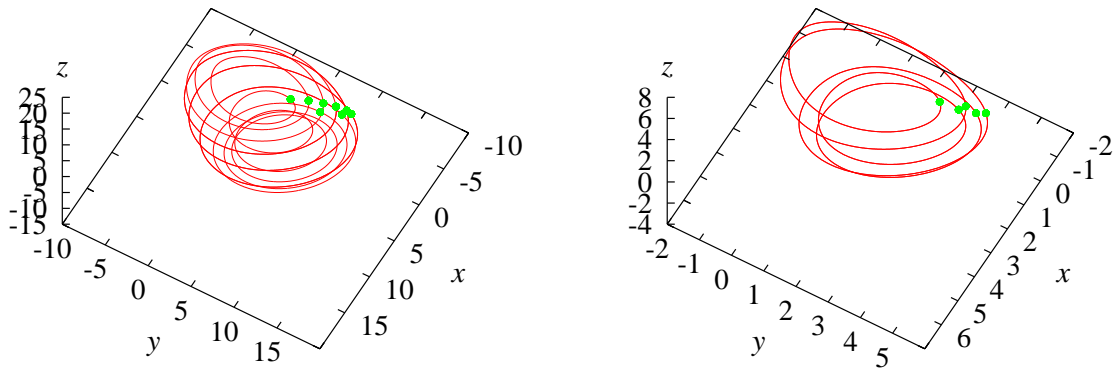
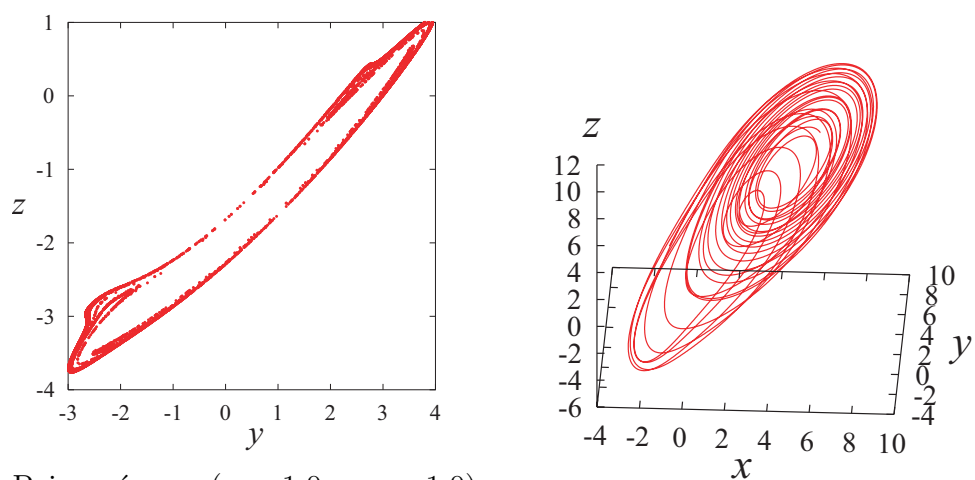


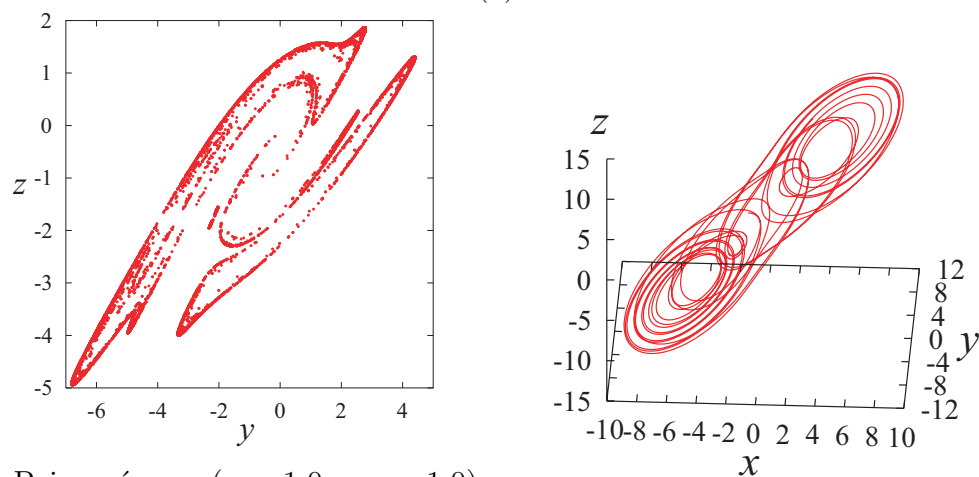
図 3.14 アーノルド舌の内側で観測できる安定なリミットサイクル

図 3.12 の領域 (g) では、NS 分岐に沿ってパラメータ A , B を大きく変化させた場合、トーラスが崩壊しカオスへと変化する現象がみられる。図 3.15 にこのとき観測されるカオスアトラクタとその Poincaré マップを示す。元の非線形特性での方程式式 (3.2) と同様に、発生したカオスアトラクタ図 3.15(a) は原点对称な位置に同じカオスアトラクタが存在しており、パラメータを変化させることによって一つに融合したカオスアトラクタ図 3.15(b) へと変化する。

図 3.16 に NS 分岐に沿って ($B = -2.2A + 2.53$) パラメータを変化させたときのリヤプノフ指数を示す。パラメータ A , B を小さい値から大きい値へと変化させると、最大リヤプノフ指数が 0 となるトーラスから、最大リヤプノフ指数が正の値となるカオスへと変化している様子がわかる。



Poincaré map ($x = 1.0, x = -1.0$)
(a)



Poincaré map ($x = 1.0, x = -1.0$)
(b)

図 3.15 式 (3.4) で発生するカオスアトラクタ

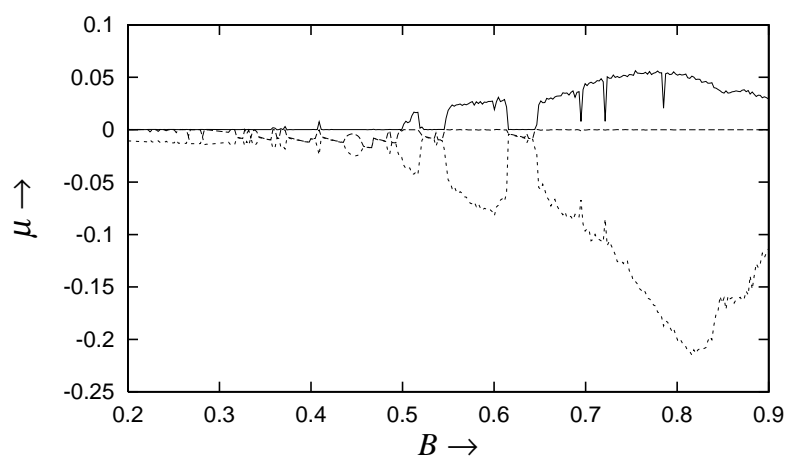


図 3.16 パラメータを変化させたときのリヤプノフ指数

これらの現象は Chua 発振器等と同様に、実回路上でも観測することができる．図 3.17 は回路上で観測したトーラスとその周波数特性である．トーラスの特徴である 2 つの周波数ピークを持つ状態であることが周波数特性の結果からわかる．図 3.18 は実回路で観測した周期がロックする現象とカオスアトラクタである．

本節では、非線形抵抗の設計によって同様の自律系システムで存在する現象を、この変形 BVP 発振器でも発生させることができることを示した．しかし、拡張した非線形特性ではパラメータの数が増えてしまい、分岐構造の比較などの検証を複雑にしてしまう．また、この非線形特性の拡張部分は、本論文で議論する分岐構造の比較、同期現象等とは、本質的に係わるものではないと考え、以降は元の非線形特性である $g(v) = -a \tanh(bv)$ を用いる．

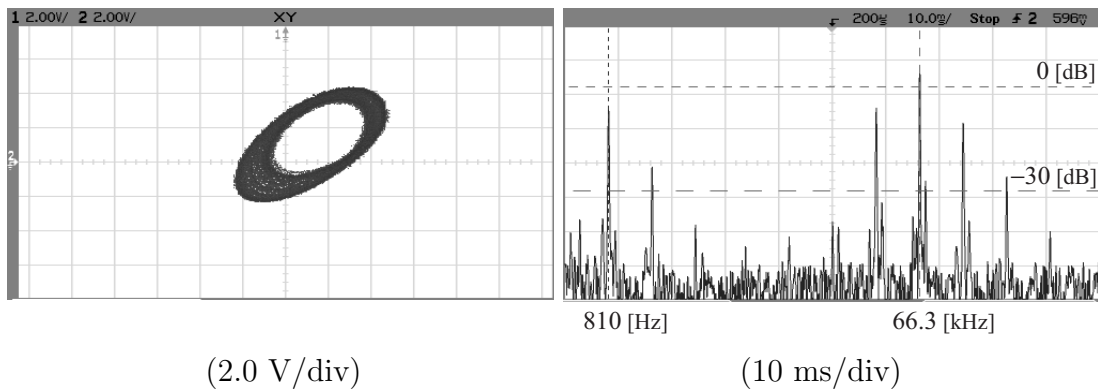
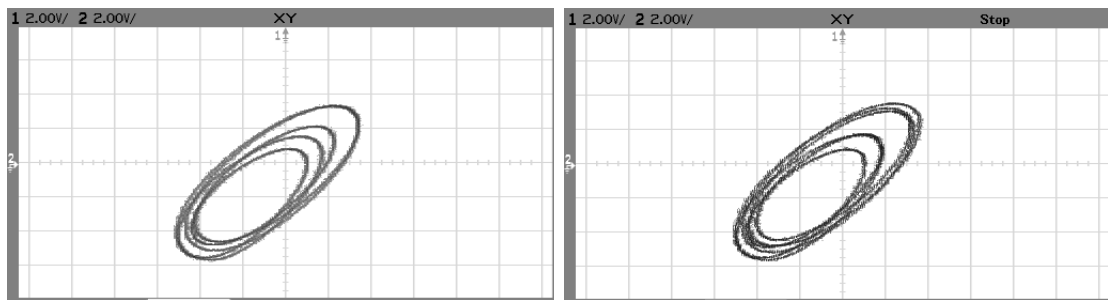


図 3.17 実回路上で観測できるトーラスとその周波数特性

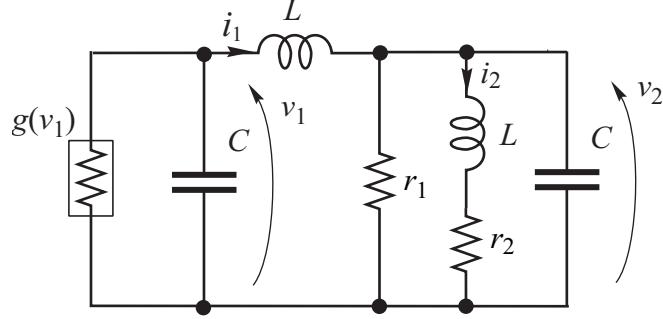


(a) 周期がロックする現象



(b) カオスアトラクタ

図 3.18 実回路上で観測できるアトラクタ (2.0 V/div)

図 3.19 簡略化 v - i 結合 BVP 発振器

3.2 簡略化 v - i 結合 BVP 発振器

図 3.19 は 3.1 節の変形 BVP 発振器に対し、更にコイルと抵抗を付加した回路である．この回路は 4 章の 4.3 節で説明する v - i 結合 BVP 発振器から、結合抵抗と片方の BVP 発振器の非線形抵抗を取り除いた回路ともいえる．この回路は変形 BVP 発振器から更に次元が高くなった 4 次元自律系システムとなる．この発振器の回路方程式を式 (3.5) に示す．本論文では、2つのキャパシタとコイルは同じ値としている．

$$\begin{cases} C \frac{dv_1}{dt} = -i_1 - g(v_1) \\ L \frac{di_1}{dt} = v_1 - v_2 \\ C \frac{dv_2}{dt} = i_1 - i_2 - \frac{v_2}{r_1} \\ L \frac{di_2}{dt} = v_2 - r_2 i_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

式 (3.5) の正規化を行った方程式が式 (3.6) である．

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -y_1 + \tanh \gamma x_1 \\ \frac{dy_1}{d\tau} = x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} = y_1 - y_2 - \frac{x_2}{k_1} \\ \frac{dy_2}{d\tau} = x_2 - k_2 y_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

このとき,

$$\tau = \sqrt{LC}\tau, \quad v_j = a\sqrt{\frac{L}{C}}x_j, \quad i_j = ay_j, \quad \gamma = ab\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad k_j = r_j\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (j = 1, 2)$$

となる.

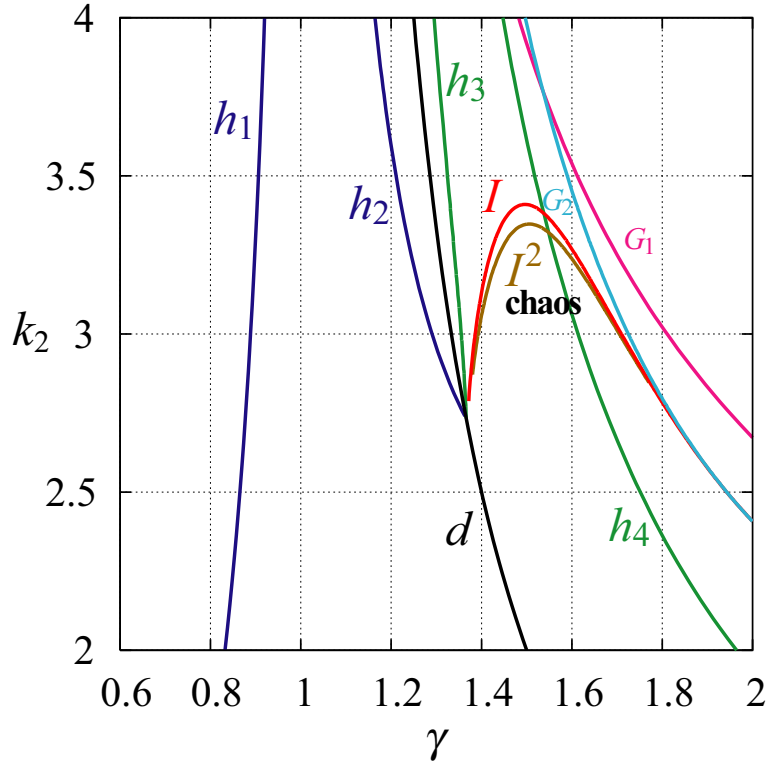


図 3.20 簡略化 v - i 結合 BVP 発振器の分岐図 ($k_1 = 1.0$)

3.2.1 簡略化 v - i 結合 BVP 発振器で起こる分岐現象

図 3.20 はパラメータ $k_1 = 1.0$ としたときの分岐図である. γ が小さい値のとき, 解軌道は全て安定な平衡点である原点へと収束状態から, Hopf 分岐 h_1 を越えることで安定なリミットサイクルが発生する. また, Hopf 分岐と D 型分枝 h_2, d, h_3 を越えてパラメータ γ を大きくした場合, 変形 BVP 発振器と同様に安定なリミットサイクルの内側の原点对称な位置に安定なリミットサイクルが 2 つ存在する状態になる. 図 3.21 に図 3.20 を拡大した分岐図を示す. 図 3.21 の矢印の方向へとパラメータを変化させることによって, 周期倍分岐連鎖から 2 つのカオス, 2 つのカオスが癒着する変形 BVP 発振器と同様の変化を観測することができる.

3.2.2 簡略化 v - i 結合 BVP 発振器の特徴

簡略化 v - i 結合 BVP 発振器では, 4 次元自律系システムであるが, 変形 BVP 発振器と同じ分岐現象, 同じアトラクタが多く観測できる, これは, 変形 BVP 発振器に素子を付加したため, 似た分岐構造を引き継いでいると考えられる. また, パラメータや次元が増えたため, 変形 BVP 発振器では同時に起こっていた分岐現象が分解され, 別の分岐曲線

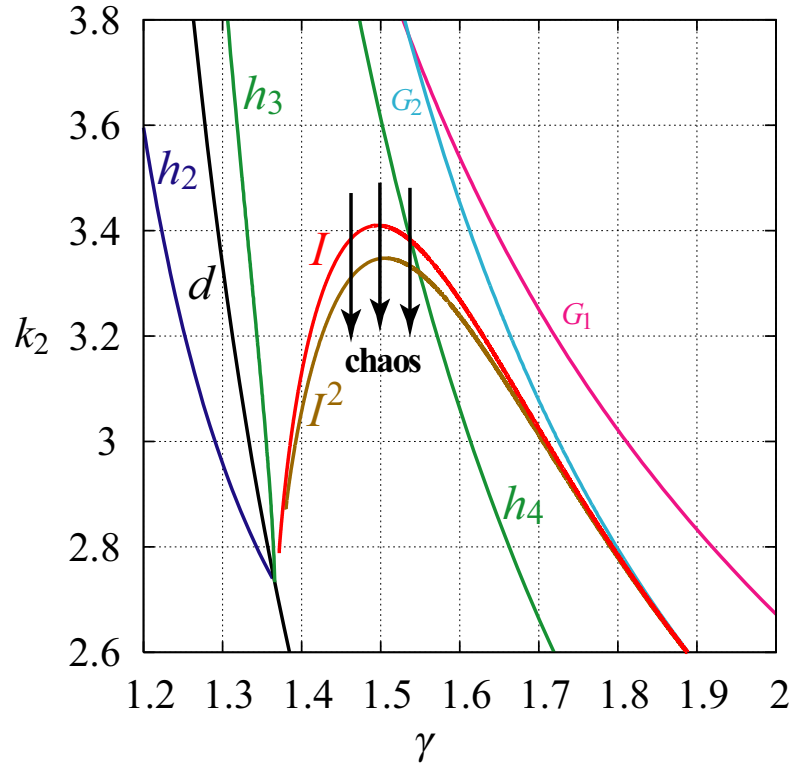


図 3.21 図 3.20 の拡大図

になっていることがわかる．また，大きな安定リミットサイクルの発生と消滅に関する分岐曲線 h_1 と G_1 が結合発振器に近い形に変化しているのがわかる．

この章では，単体の BVP 発振器に素子を追加した回路について，分岐構造や観測されるアトラクタを明らかにした．BVP 発振器にキャパシタを付加した変形 BVP 発振器では，BVP 発振器と同じ分岐構造の形を保存しながら，BVP 発振器では存在しなかった分岐が多数発生し，単体の BVP 発振器より発振領域が増えていた．また，同時に違う分岐が起こる現象や周期倍分岐連鎖によるカオスアトラクタ等，BVP 発振器では存在しなかった現象が多く見られた．更に変形 BVP 発振器では，他のシステムでは存在しない特徴的な応答と，それに伴う basin 構造が消失する現象を観測することができた．次に，変形 BVP 発振器に更に素子を追加した簡略化 $v-i$ 結合 BVP 発振器の分岐を明らかにした．この発振器では，次元，パラメータ数が変形 BVP 発振器と違うが，変形 BVP 発振器とほぼ同じアトラクタのカオスへの変化を観測することができた．また，この発振器では結合発振器に近い回路であるため，変形 BVP 発振器とは違い，分岐曲線が分解され，結合発振器に近い分岐構造を確認することができた．この結果により素子を追加，または除去した回路では元の回路の分岐構造をある程度継承しており，同様のアトラクタやその分岐が観測できることがわかる．

第4章

線形抵抗で結合したBVP発振器

本章では，線形抵抗を用いてBVP発振器を結合した場合について説明する．線形抵抗で結合した場合，一方の発振器が平衡点に落ち着いているときは一定量の電流がバイアスとして，発振している場合は周期外力としてもう一方の発振器に入力される．この入力された電流によって発振器は状態を変化させ，お互いに影響を及ぼし合う．また，お互いのBVP発振器へ印加される電流は結合抵抗の抵抗値に依存する．

本章では，BVP発振器の線形抵抗に対するパラメータ k を固定し，全ての発振器の状態を，非線形抵抗の特性 γ を変化させることで再現している．従って，パラメータ γ と結合の強さによって分岐図を得ることで，各結合方式における発振器の状態と結合強度の関係，そこで観測されるアトラクタについて比較を行う．

4.1 電圧結合

図 4.1 はBVP発振器の電圧ポート同士を線形抵抗で繋いだ結合発振器であり，この回路の回路方程式は式 (4.1) となる．

$$\left\{ \begin{array}{l} C \frac{dv_1}{dt} = -i_1 - g(v_1) - i_0 \\ L \frac{di_1}{dt} = v_1 - ri_1 \\ C \frac{dv_2}{dt} = -i_2 - g(v_2) + i_0 \\ L \frac{di_2}{dt} = v_2 - ri_2 \\ i_0 = G(v_1 - v_2) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

式 (4.1) の G は結合係数を表し，結合抵抗 R の抵抗値の逆数となる． R の抵抗値が大きい場合，結合抵抗に流れる電流は小さくなり， R の抵抗値が小さい場合，流れる電流は大きくなる．

単体のBVP発振器のときと同様に式 (4.1) の正規化を行った方程式が式 (4.2) である．

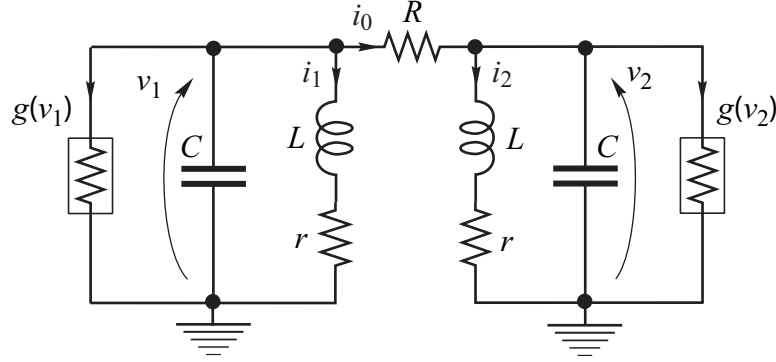


図 4.1 電圧結合 BVP 発振器

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -y_1 + \tanh \gamma x_1 - \delta(x_1 - x_2) \\ \frac{dy_1}{d\tau} = x_1 - ky_1 \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -y_2 + \tanh \gamma x_2 + \delta(x_1 - x_2) \\ \frac{dy_2}{d\tau} = x_2 - ky_2 \end{cases} \quad (4.2)$$

このとき,

$$\tau = \sqrt{LC}\tau, \quad v_j = a\sqrt{\frac{L}{C}}x_j, \quad i_j = ay_j \quad (j = 1, 2)$$

$$\gamma = ab\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad k = r\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \delta = G\sqrt{\frac{L}{C}}$$

となる.

4.1.1 電圧結合で生じる分岐現象

4.1.1.1 平衡点の分岐

図 4.2 は式 (4.2) の平衡点の分岐図であり. 図 4.3 は γ を変化させたときに発生する平衡点とその安定性を示した図である. 図 4.3 において O の左側の添字は不安定次元の数を表す.

図 4.3 の O_0 は原点 (二つの発振器の状態が $(0, 0)(0, 0)$) の平衡点を表しており, パラメータ γ を増加させることで Hopf 分岐 (h_{01} , h_{02}) と D 型分岐 (d_{01} , d_{02}) によって原点の安定性が変化していることがわかる. また, h_{01} からは完全同相同期のリミットサイクルが, h_{02} からは完全逆相同期のリミットサイクルが発生する. 原点の D 型分岐 d_{01} によって発生した二つの平衡点が O_1 , d_{02} によって発生した二つの平衡点が O_2 である. 図 4.3 では, それぞれの発振器から 2 次元で観測した値を並べ $(x_1, y_1)(x_1, y_2)$ という形で平衡点の座標を表記する. この場合, O_1 は原点に対し同相方向に対称な位置に存在し, 片方の発振器の状態 (x_1, y_1) を (x, y) とすると, O_1 の座標値は $(-x, -y)(-x, -y)$, $(-x, -y)(-x, -y)$

となる．また， O_2 は逆走方向に対称な座標 $(x, y)(-x, -y)$ と $(-x, -y)(x, y)$ に存在する．更に二つの平衡点 O_2 は D 型分子 d_2 により，それぞれ二つ平衡点を発生させる．この新たに発生した 4 個の平衡点 O_3 は元となった平衡点 O_2 を中心とし，同相方向 (中心 O_2 から $(+\alpha, +\beta)$ と $(-\alpha, -\beta)$ を足した座標) に存在する．これら原点から派生した平衡点は Hopf 分岐 ($h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}, h_3$) により平衡点近傍に不安定なリミットサイクルを発生させる．

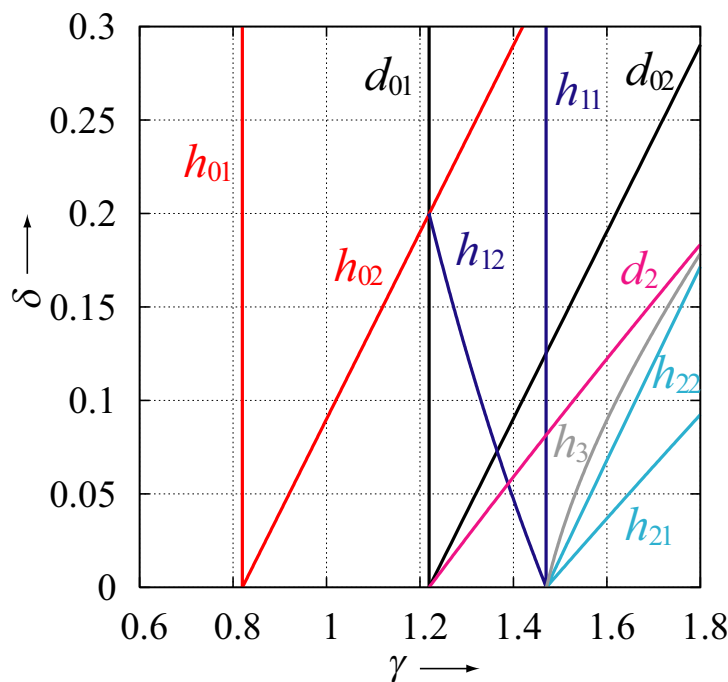


図 4.2 平衡点の分岐

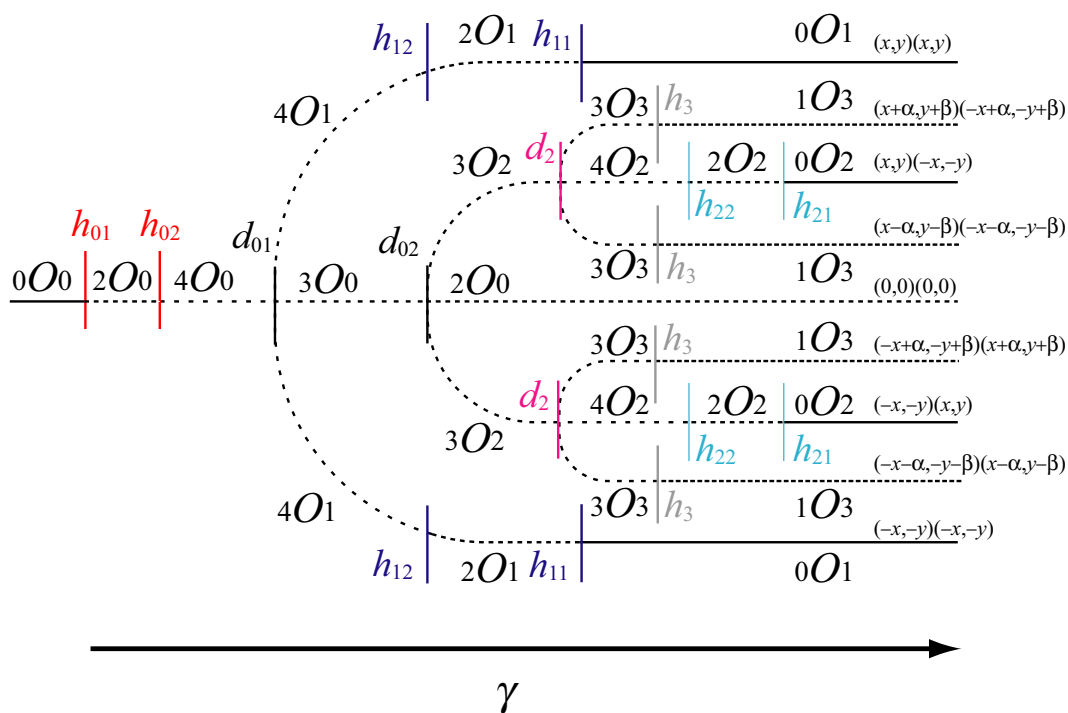


図 4.3 平衡点の安定性

本章では原点 O_o の Hopf 分岐, 中でも同相方向にリミットサイクルを発生させる分岐に h_{01} , 逆相方向にリミットサイクルを発生させる分岐には h_{02} という番号を付け, この規則は全結合方式において統一してある. また, 原点の D 型分岐についても同様に, 同相方向に平衡点を発生させる場合は d_{01} , 逆相方向に平衡点を発生させる場合は d_{02} とした. 更に原点から発生した平衡点 O_1, O_2 についても同様の意味を持つ.

4.1.1.2 リミットサイクルの分岐

電圧結合 BVP 発振器では, h_{01} によって発生した完全同相同期振動が安定に観測でき, h_{02} で発生する完全逆相同期振動は不安定で安定には観測できない. 完全同相同期のリミットサイクルは図 4.5 の接線分岐 G_{01} によって, 完全逆相同期振動は接線分岐 G_{02} によって消滅する. 従って, h_{01} と G_{01} の間の領域が安定な同期振動を観測できるパラメータ領域である. また, 非線形性が強く結合係数が小さい領域では, 図 4.4 に示す安定なリミットサイクルが接線分岐によって発生する. このリミットサイクルはピッチフォーク分岐や周期倍分岐を起こしカオスアトラクタへと変化する. しかし, 完全同相同期なリミットサイクルの安定度が高いため, カオスアトラクタへと変化した解軌道はすぐに完全同相同期リミットサイクルへと引き込まれ安定に観測することができない.

完全同相同期リミットサイクルが強いため, リミットサイクルの分岐現象があまり観測できない電圧合であるが, 不安定なリミットサイクルの分岐現象は多く起こっている. 不安定なリミットサイクルは d_{01}, d_{02} より発生した同相, 逆相方向に存在する平衡点から発生し, 分岐現象を起こして不安定カオスへと変化する. h_{12} から発生した完全不安定なリミットサイクルは Neimark-Sacker 分岐 NS_{12} によってトーラスへと変換し, そこから不安定カオスへと変化する (図 4.6). また, h_{22} から発生した完全不安定なリミットサイクルは, I_{22} によって 2 周期のリミットサイクルになってから図 4.7 と同様に不安定カオスへと変化する (図 4.6).

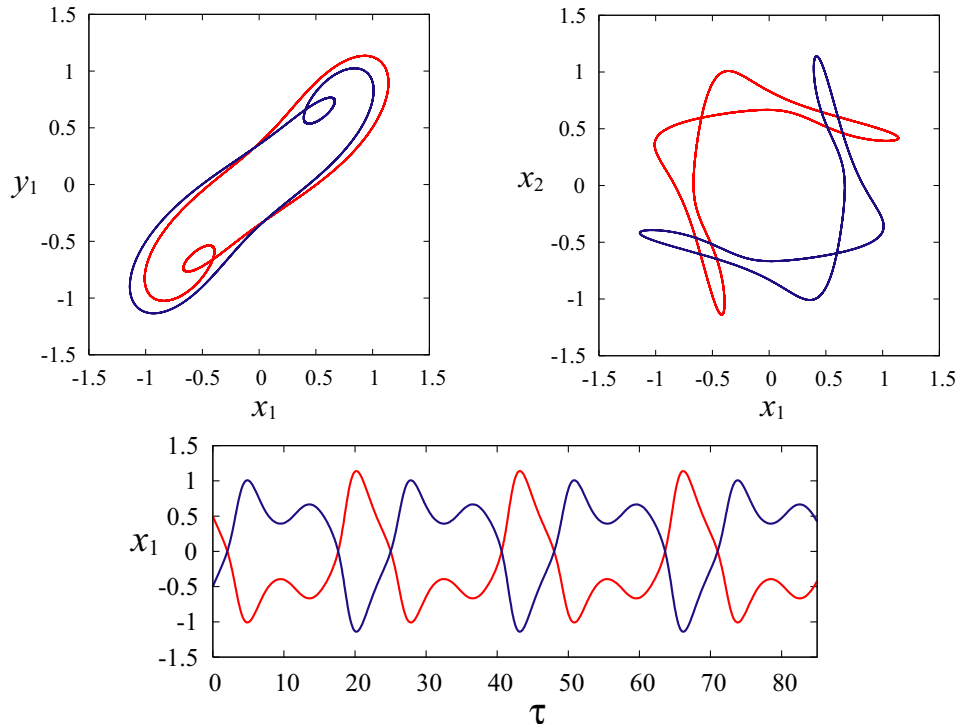


図 4.4 非線形性の強い領域で観測できる安定なリミットサイクル

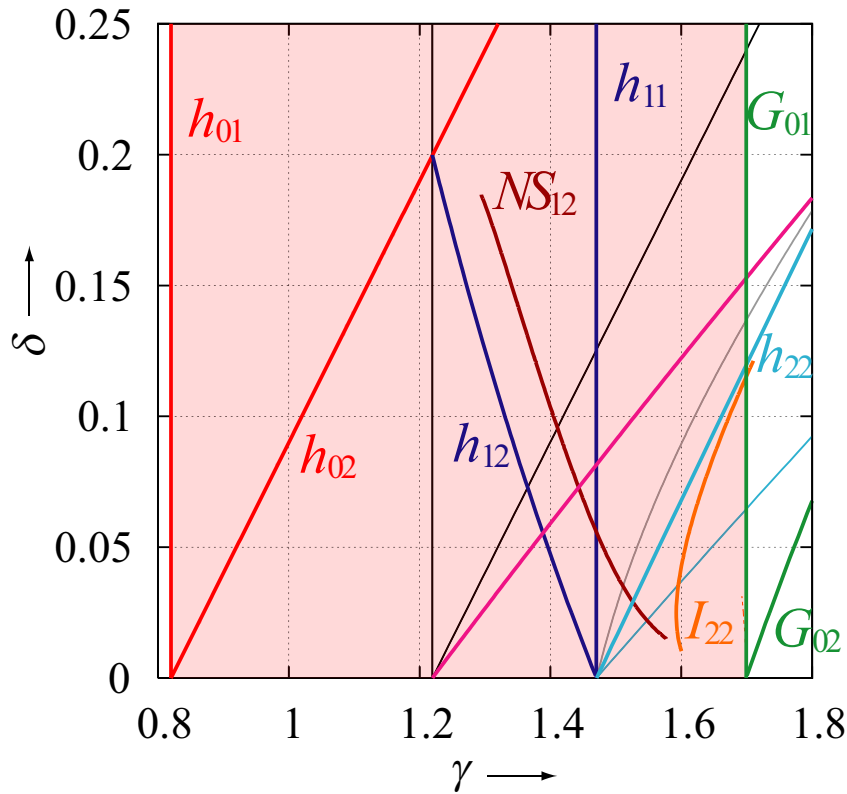
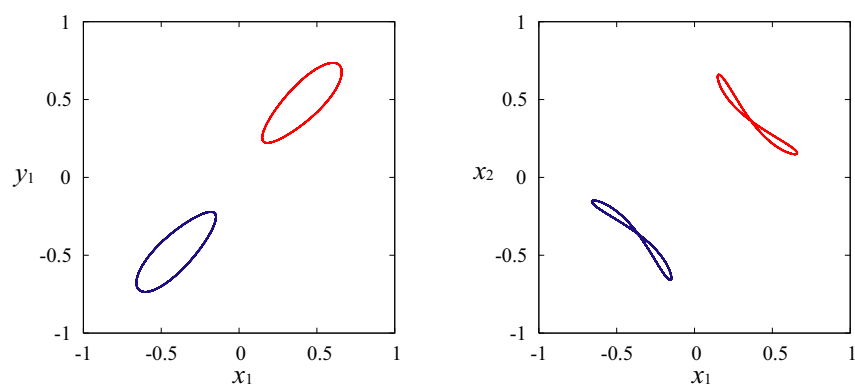


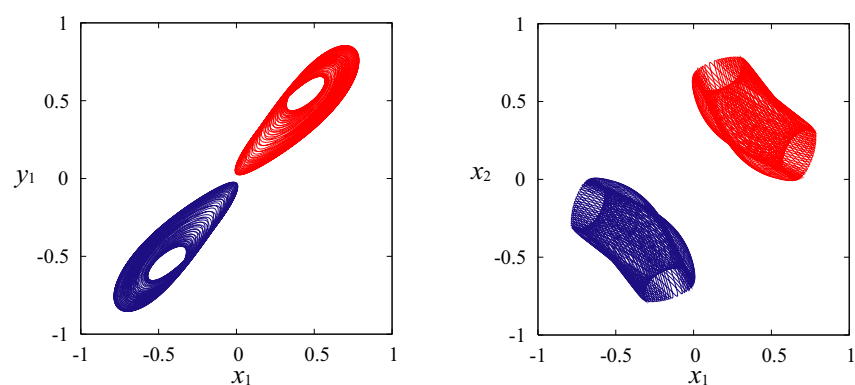
図 4.5 リミットサイクルの分岐

4.1.2 電圧結合の特徴

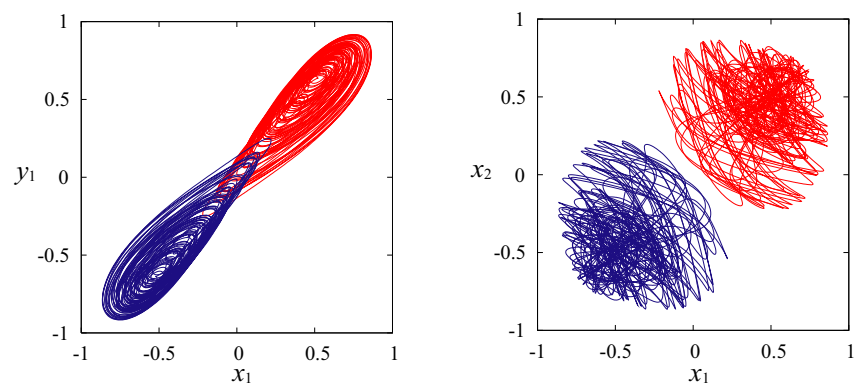
電圧結合では、完全同相同期振動が広い範囲で安定に存在している．この安定な同期振動は他の結合方式と比べ、分岐現象を起こしカオスやトーラスなどのアトラクタを発生することはない．また、不安定な完全逆相同期リミットサイクルに関しても分岐を起こすことなく消滅する．更にこの電圧結合に関しては完全同相同期振動の安定性が強いため、他のカオスアトラクタ等は安定に観測することができない．従って、完全同相同期振動が広く安定に観測できることがこの電圧結合の特徴と言える．他には不安定なリミットサイクルに関して多くの分岐現象が発生しているが、不安定なリミットサイクルに関する分岐は実際の回路では観測できない．



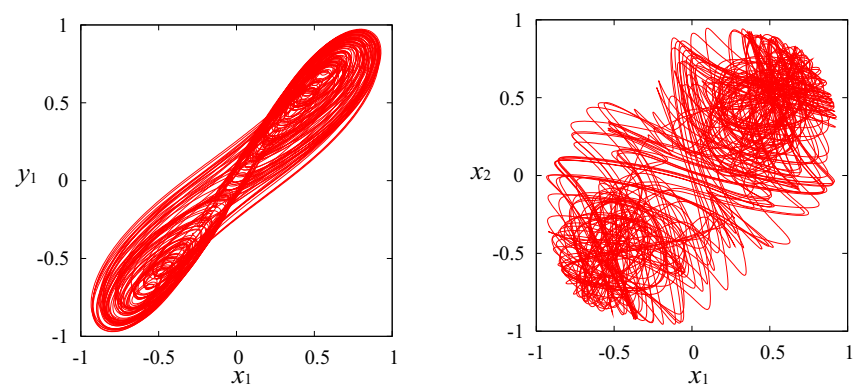
(a) 完全不安定リミットサイクル



(b) 完全不安定トーラス

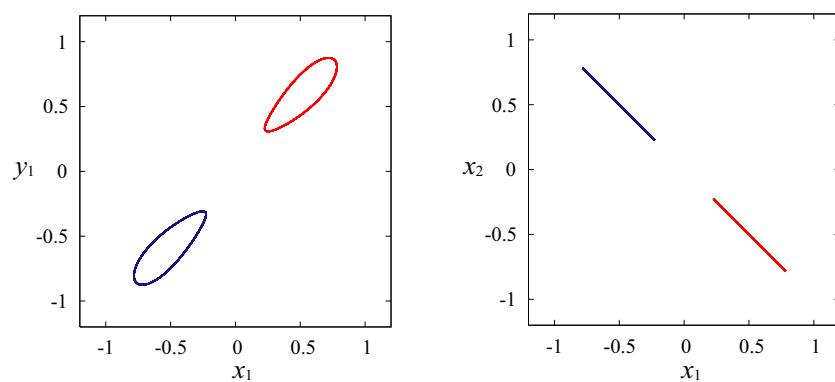


(c) 不安定カオス

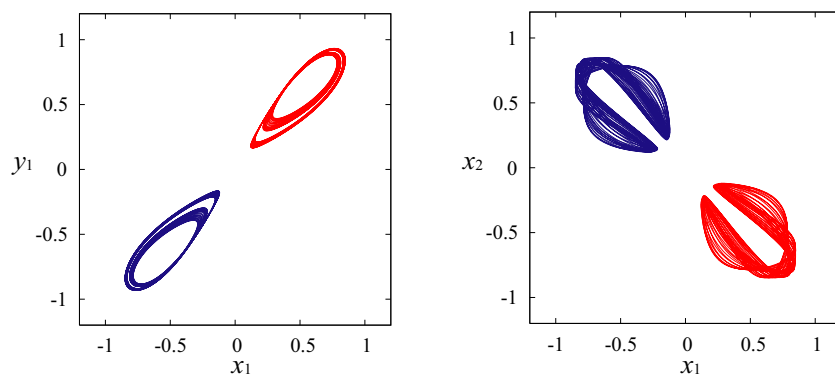


(d) 一つに癒着した不安定カオス

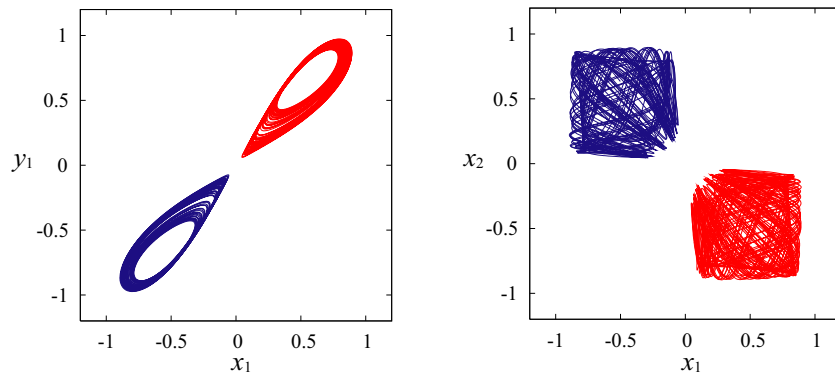
図 4.6 h_{12} によって発生した完全不安定リミットサイクルの分岐



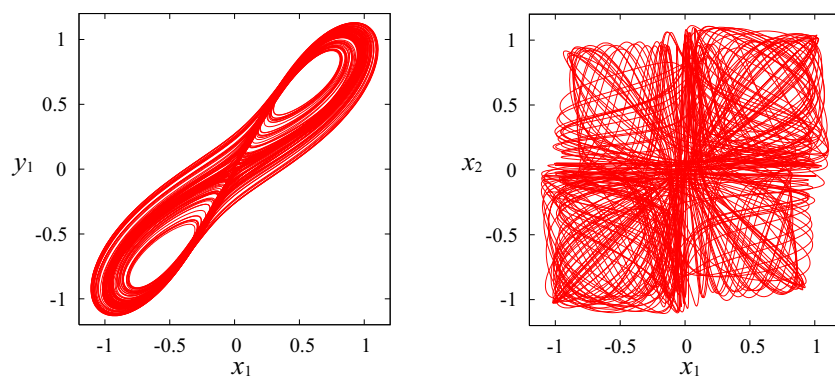
(a) 完全不安定リミットサイクル



(b) 完全不安定トーラス



(c) 不安定カオス



(d) 一つに癒着した不安定カオス

図 4.7 h_{22} によって発生した完全不安定リミットサイクルの分岐

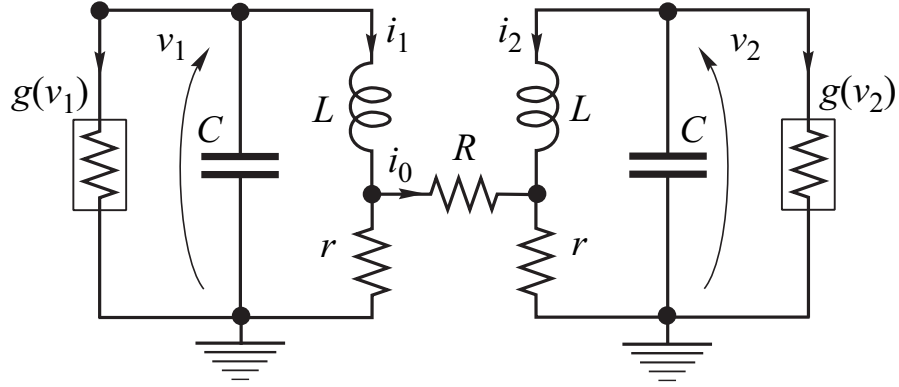


図 4.8 電流結合 BVP 発振器

4.2 電流結合 BVP 発振器

図 4.8 は BVP 発振器の電流ポート同士を線形抵抗で繋いだ結合発振器であり，この回路の回路方程式は式 (4.3) となる．

$$\begin{cases} C \frac{dv_1}{dt} = -i_1 - g(v_1) \\ L \frac{di_1}{dt} = v_1 - r(i_1 - i_0) \\ C \frac{dv_2}{dt} = -i_2 - g(v_2) \\ L \frac{di_2}{dt} = v_2 - r(i_2 + i_0) \\ i_0 = G \{r(i_1 - i_0) - r(i_2 + i_0)\} \end{cases} \quad (4.3)$$

式 (4.3) を正規化した方程式が式 (4.4) である．

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -y_1 + \tanh \gamma x_1 \\ \frac{dy_1}{d\tau} = x_1 - ky_1 - \frac{\delta k^2}{1 + 2\delta k}(y_1 - y_2) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -y_2 + \tanh \gamma x_2 \\ \frac{dy_2}{d\tau} = x_2 - ky_2 + \frac{\delta k^2}{1 + 2\delta k}(y_1 - y_2) \end{cases} \quad (4.4)$$

このとき，

$$\tau = \sqrt{LC}\tau, \quad v_j = a\sqrt{\frac{L}{C}}x_j, \quad i_j = ay_j \quad (j = 1, 2)$$

$$\gamma = ab\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad k = r\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \delta = G\sqrt{\frac{L}{C}}$$

となる．

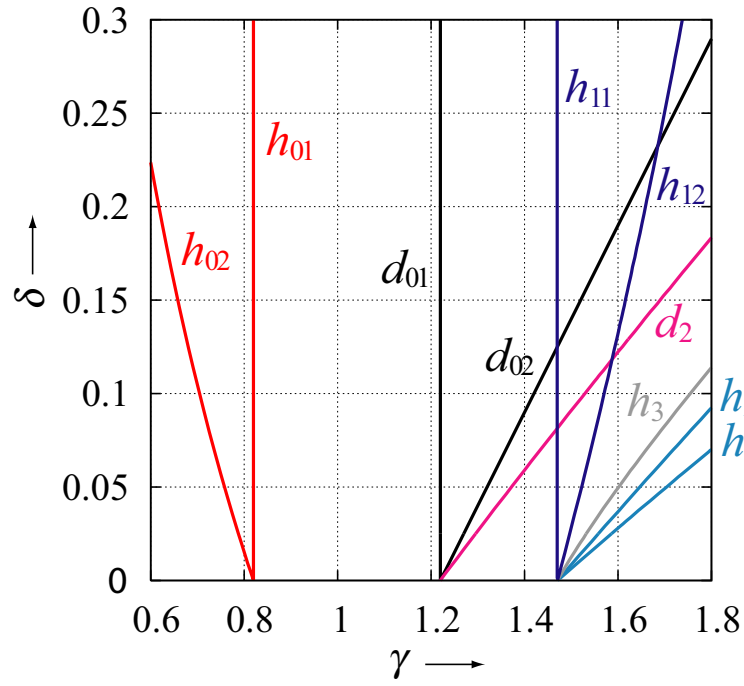


図 4.9 平衡点の分岐

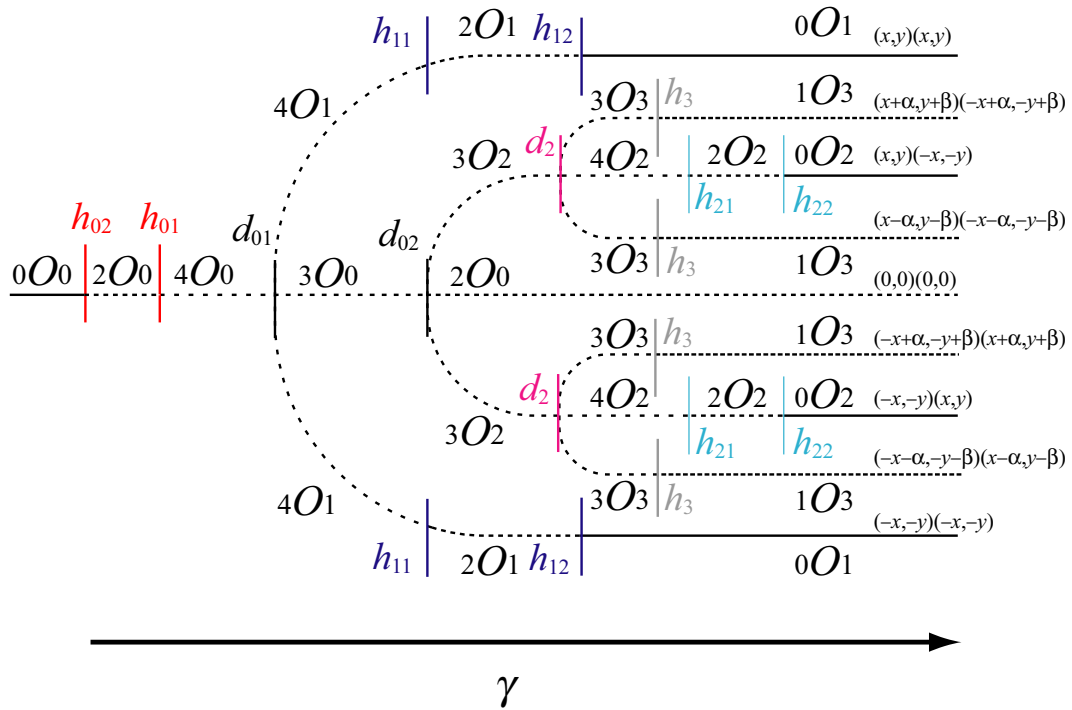


図 4.10 平衡点の安定性

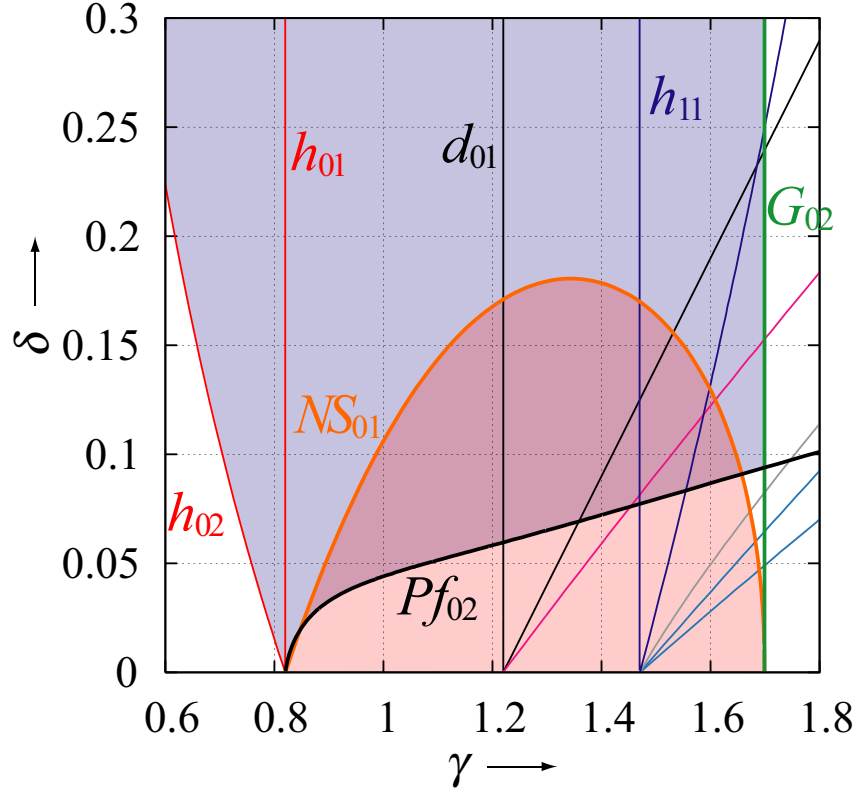


図 4.11 リミットサイクルの分岐

4.2.1 電流結合で生じる分岐

4.2.1.1 平衡点の分岐

図 4.9 は式 (4.4) の平衡点の分岐図であり、図 4.10 は γ を変化させたときに発生する平衡点の安定性を示した図である。電圧結合と比べると、先に h_{02} が起こるため、安定な完全逆相同期のリミットサイクルが観測できる。全ての Hopf 分岐において、逆相方向にリミットサイクルを発生させる分岐と、同相方向にリミットサイクルを発生させる分岐の順番が電圧結合とは逆になっている。

4.2.1.2 リミットサイクルの分岐

電圧結合 BVP 発振器では、 h_{02} によって発生した安定な完全逆相同期リミットサイクルは図 4.11 のピッチフォーク分岐 Pf_{02} によって不安定となる。また、完全逆相同期リミットサイクルは接線分岐 G_{02} によって消滅する。従って、 h_{02} と G_{02} の間で Pf_{02} より上の領域が、安定な完全逆相同期振動が観測できパラメータ領域である。 Pf_{02} によって発生した逆相同期付近のリミットサイクルは、分岐現象を起こしカオスアトラクタへと変化する。この分岐についての詳細は文献 [11] で明らかにされている。また、 h_{01} で発生する完全同相同期振動は不安定な状態で発生するが、 NS_{01} の内側では安定なリミットサイクルとして観測できる。この NS_{01} の内側の領域と、安定な完全逆相同期リミットサイクルが存在する領域が重なったパラメータ領域では、両方の安定な完全同期リミットサイクルが共存している状態となり、初期値によってどちらかのリミットサイクルへと収束する。図

4.12 は NS_{01} によって完全同相同期リミットサイクルから発生したトーラスである．これら安定なカオスアトラクタ，トーラス以外にも電圧結合と同様に不安定リミットサイクルとそこから発生する不安定カオスは電流結合でも発生している．

4.2.2 電流結合の特徴

電流結合では，電圧結合とは異なり完全逆相同期振動が安定に存在しており，完全同相同期振動は不安定な状態で発生する．しかし，完全同相同期リミットサイクルが安定となるパラメータ領域が存在するため，完全同相同期振動も安定に観測できる．また，これらの同期振動の共存状態も観測することができる．

電流結合では，電圧結合と比べこれら同期振動から発生するトーラスやカオスアトラクタが，広い領域において安定に観測できる．電流結合の特徴はこれら多彩なアトラクタが観測できるところであると言える．

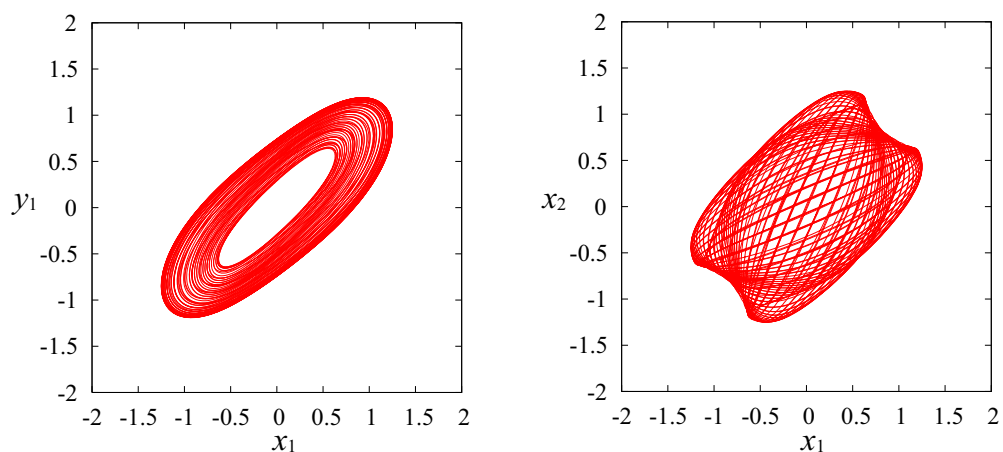
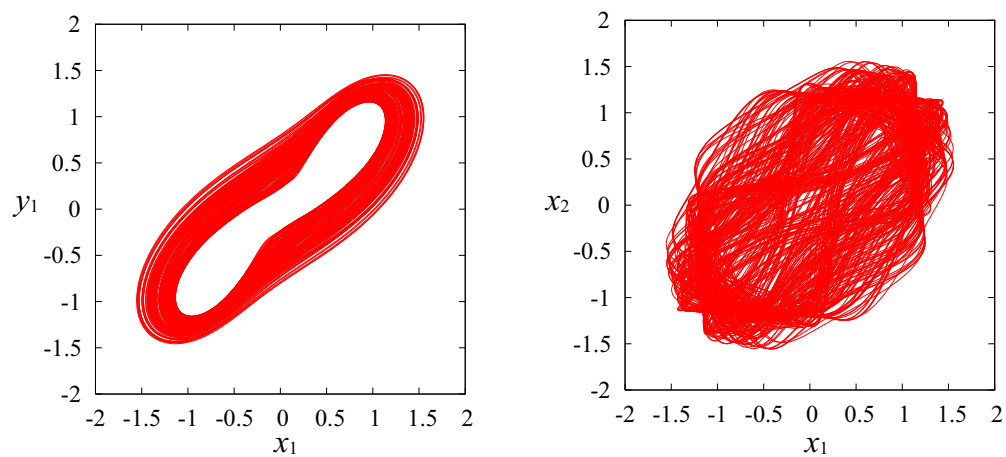
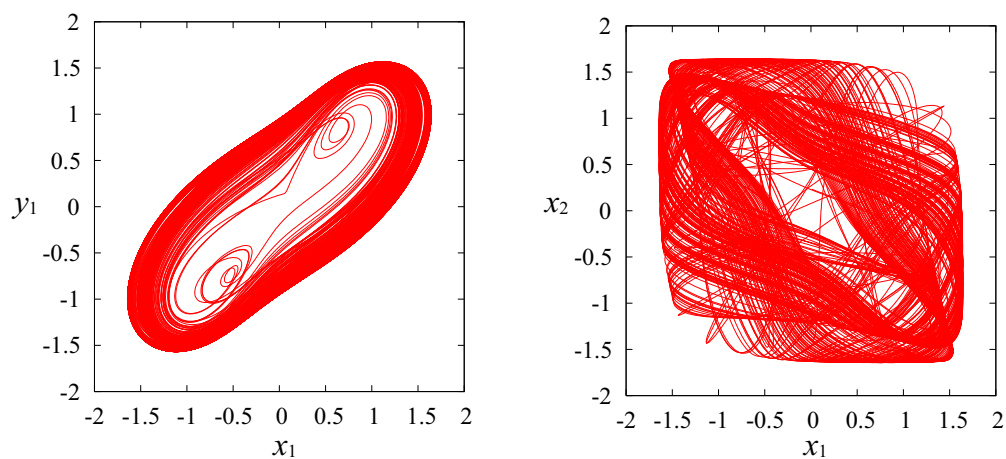


図 4.12 完全同相同期振動から変化するトーラス



(a) 同相同期のリミットサイクルから変化するカオス



(b) 逆相同期のリミットサイクルから変化するカオス

図 4.13 安定に観測できるカオスアトラクタ

4.3 非対称結合 BVP 発振器

図 4.14 は BVP 発振器の電圧ポートと電流ポートを線形抵抗で繋いだ結合発振器であり、この回路の回路方程式は式 (4.5) となる。

$$\begin{cases} C \frac{dv_1}{dt} = -i_1 - g(v_1) \\ L \frac{di_1}{dt} = v_1 - r(i_1 - i_0) \\ C \frac{dv_2}{dt} = -i_2 - g(v_2) + i_0 \\ L \frac{di_2}{dt} = v_2 - r i_2 \\ i_0 = G \{v_1 - r(i_2 + i_0)\} \end{cases} \quad (4.5)$$

単体の BVP 発振器のときと同様に正規化を行った方程式が式 (4.6) である。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -y_1 + \tanh \gamma x_1 \\ \frac{dy_1}{d\tau} = x_1 - k y_1 + \frac{\delta k}{1 + \delta k} (k y_1 - x_2) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -y_2 + \tanh \gamma x_2 + \frac{\delta}{1 + \delta k} (k y_1 - x_2) \\ \frac{dy_2}{d\tau} = x_2 - k y_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

このとき、

$$\tau = \sqrt{LC} \tau, \quad v_j = a \sqrt{\frac{L}{C}} x_j, \quad i_j = a y_j \quad (j = 1, 2),$$

$$\gamma = ab \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad k = r \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \delta = G \sqrt{\frac{L}{C}}$$

となる。

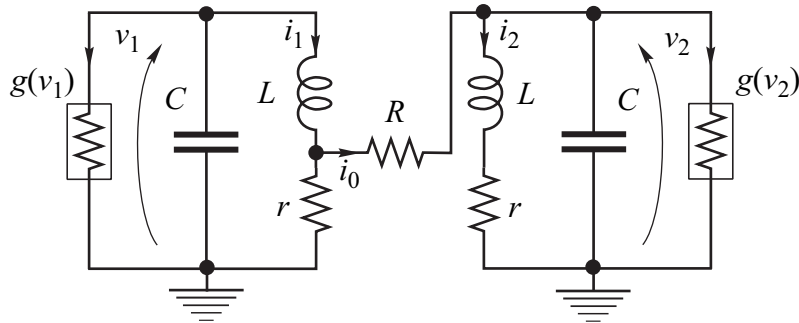


図 4.14 電圧結合 BVP 発振器

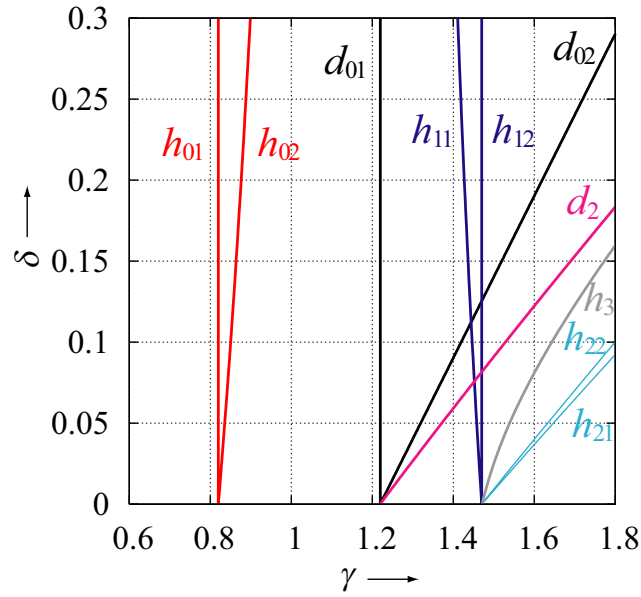


図 4.15 平衡点の分岐

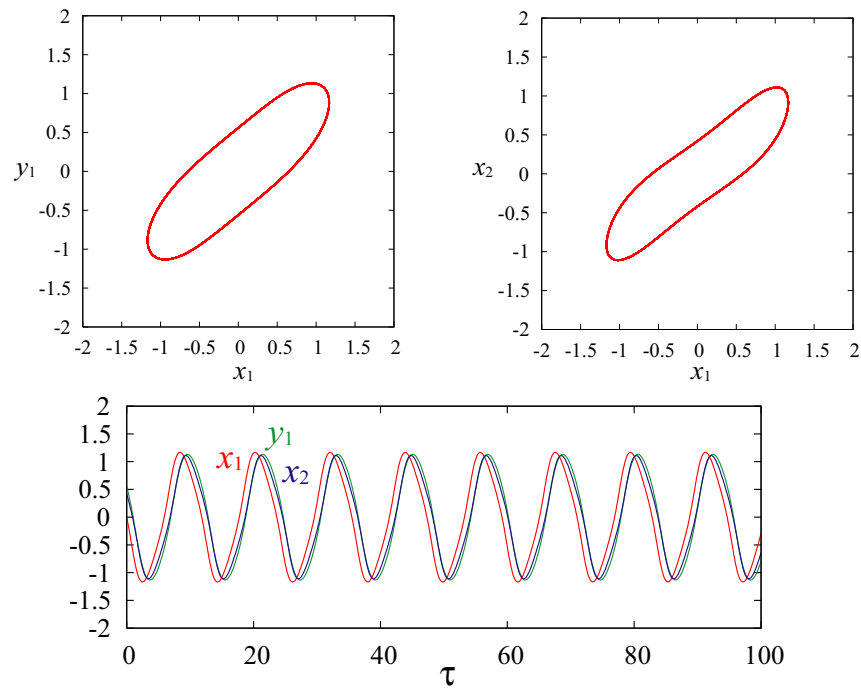


図 4.16 安定なリミットサイクル

4.3.1 非対称結合で生じる分岐

4.3.1.1 平衡点の分岐

図 4.15 に式 (4.6) の平衡点の分岐図を示す．原点から発生するリミットサイクルに関しては電圧結合と同じで，Hopf 分岐 h_{01} によって同相方向のリミットサイクルが安定な状態で発生する．図 4.16 は h_{01} によって発生した安定なリミットサイクルである．非線形結合の場合，発振器の電圧ポートと電流ポートを結合しているため，片方の発振器における電流の振動 (y_1) と，もう一方の発振器における電圧の振動 (x_2) が同期する，このため

他の結合とは違い完全同期リミットサイクルは発生せず、位相のずれたリミットサイクルが観測される。

非対称結合では、Hopf 分岐、D 型分岐において、同相方向と逆相方向のどちらが先に起こるか、その順番は電圧結合、電流結合のどちらかと一致するわけではない。原点から発生する平衡点 O_1 に関しては電流結合と同じ順番であるが、他の平衡点に関しては電圧結合と同じ順番で分岐が起こる。これは電圧結合、電流結合両方が持つ分岐の特徴を持つためではないかと考えられる。また、非対称結合の平衡点の分岐では、他の結合方式と比べ、組となる同相、逆相方向の分岐曲線が接近しているという特徴がある。

4.3.1.2 リミットサイクルの分岐

図 4.15 は式 (4.6) のリミットサイクルの分岐図である。同相方向に存在する位相のずれたリミットサイクル図 4.16 は、ピッチフォーク分岐 Pf_{01} によって不安定となり、接線分岐 G_{01} によって消滅する。従って h_{01} と Pf_{01} の間の領域で位相のずれたリミットサイクル図 4.16 が安定に観測できる。図 4.18 は Pf_{01} によって発生した安定なリミットサイクルであり、このリミットサイクルは周期倍分岐 I_1 付近で周期倍分岐連鎖によってカオスアトラクタへと変化する。図 4.19 に図 4.18 から変化したカオスアトラクタを示す。

パラメータ γ が接線分岐 G_2 を越えたとき、安定なリミットサイクル図 4.20 が発生する。この安定なリミットサイクルは NS 分岐 NS_2 によって安定なトーラスへと変化する。

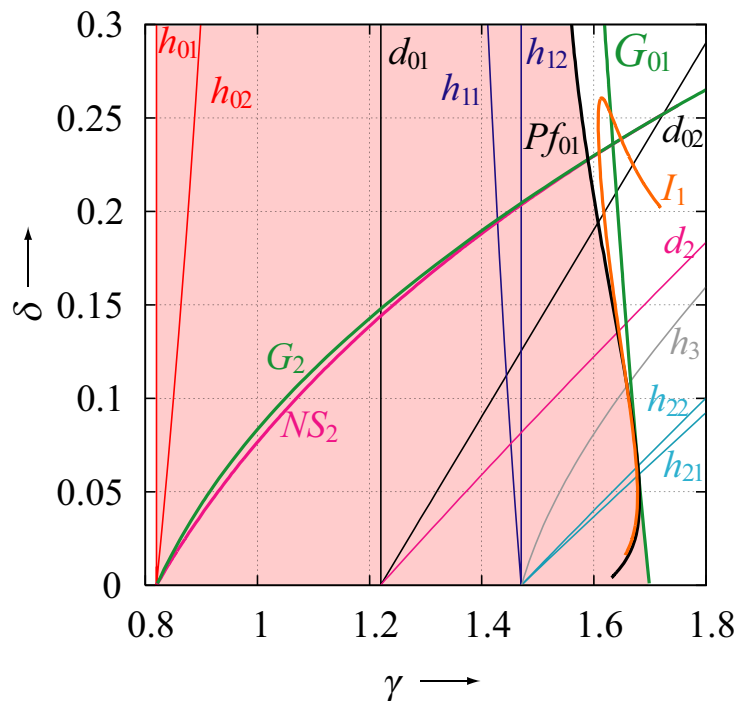


図 4.17 リミットサイクルの分岐

4.3.2 非対称結合の特徴

非対称結合の場合，電圧結合と同様に位相のずれた同期発振が広い範囲で安定に存在している．この安定なリミットサイクルは電圧結合と同様に安定性が強く，図 4.21 のトラスもパラメータを変化させると，すぐに安定なリミットサイクルに向かって収束してしまう．非対称結合の特徴としては，同じ平衡点から起こる分岐に関し，電圧結合，電圧結合と違い，二つの分岐曲線が接近していることが挙げられる．また，他の結合と違い完全同相，または完全逆相な発振が存在しないといった特徴もある．

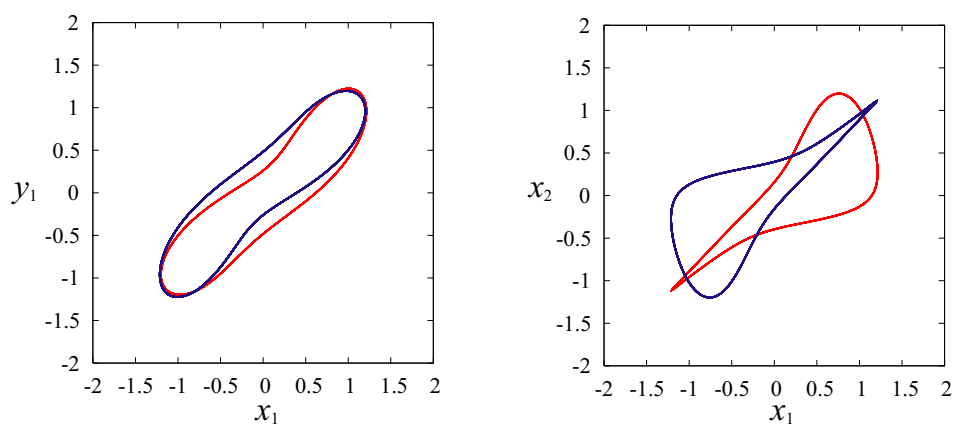
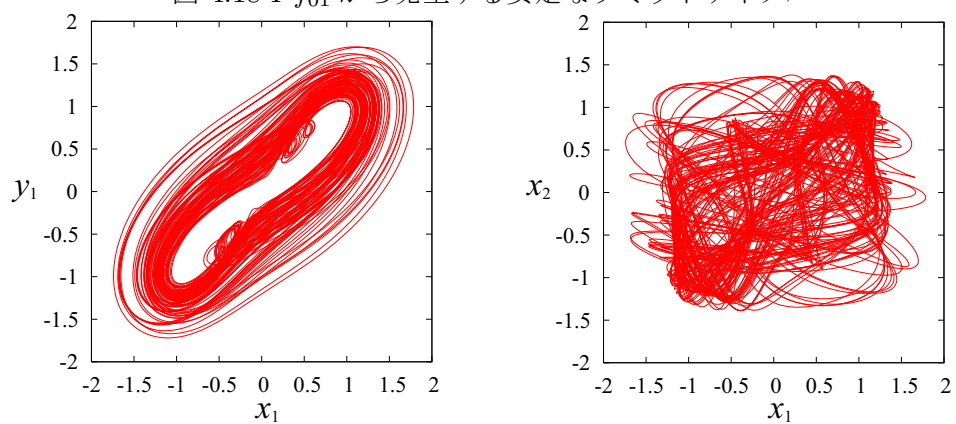
図 4.18 Pf_{01} から発生する安定なリミットサイクル

図 4.19 図 4.18 から変化したカオスアトラクタ

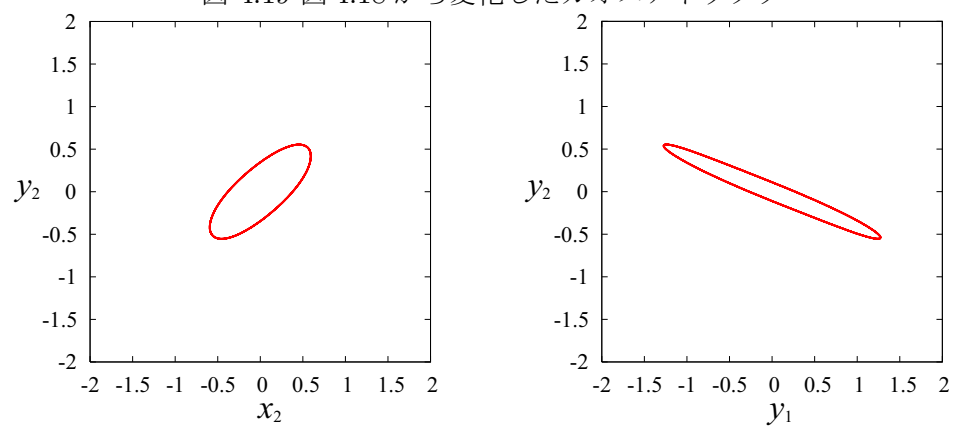
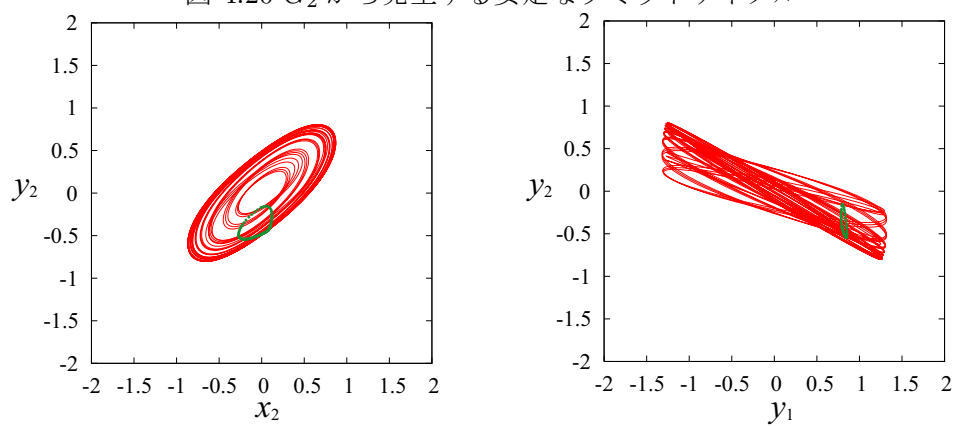
図 4.20 G_2 から発生する安定なリミットサイクル

図 4.21 図 4.20 から変化したトーラス

4.4 交差結合BVP発振器

図4.22はBVP発振器の電圧ポートと電流ポートをそれぞれ交差する形で繋いだ結合発振器であり、この回路の回路方程式は式(4.7)となる。

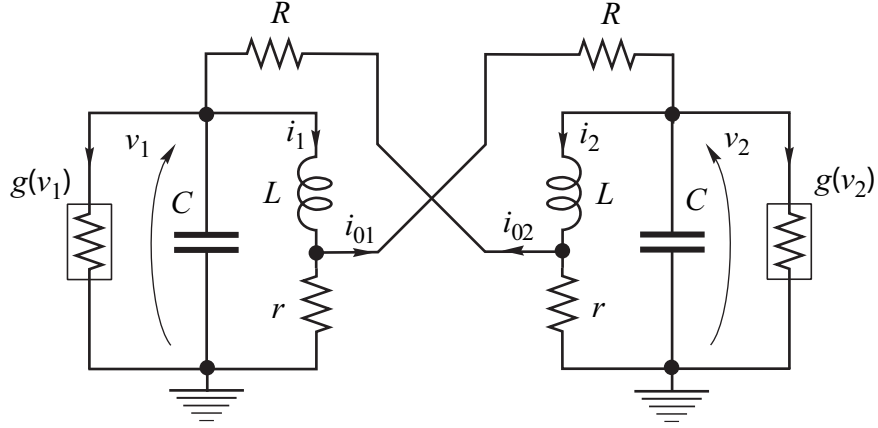


図 4.22 交差 BVP 発振器

$$\left\{ \begin{array}{l} C \frac{dv_1}{dt} = -i_1 - g(v_1) + i_{02} \\ L \frac{di_1}{dt} = v_1 - r(i_1 - i_{01}) \\ C \frac{dv_2}{dt} = -i_2 - g(v_2) + i_{01} \\ L \frac{di_2}{dt} = v_2 - r(i_2 - i_{02}) \\ i_{01} = G \{v_1 - r(i_2 + i_{01})\} \\ i_{02} = G \{v_2 - r(i_1 + i_{02})\} \end{array} \right. \quad (4.7)$$

式(4.7)を正規化した方程式が式(4.8)である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{d\tau} = -y_1 + \tanh \gamma x_1 + \frac{\delta}{1 + \delta k} (ky_2 - x_1) \\ \frac{dy_1}{d\tau} = x_1 - ky_1 + \frac{\delta k}{1 + \delta k} (ky_1 - x_2) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -y_2 + \tanh \gamma x_2 + \frac{\delta}{1 + \delta k} (ky_1 - x_2) \\ \frac{dy_2}{d\tau} = x_2 - ky_2 + \frac{\delta k}{1 + \delta k} (ky_2 - x_1) \end{array} \right. \quad (4.8)$$

このとき,

$$\tau = \sqrt{LC}\tau, \quad v_j = a\sqrt{\frac{L}{C}}x_j, \quad i_j = ay_j \quad (j = 1, 2),$$

$$\gamma = ab\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad k = r\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \delta = G\sqrt{\frac{L}{C}}$$

となる.

4.4.1 交差結合 BVP 発振器で生じる分岐

図 4.23 に式 (4.8) の分岐図を示す. 交差結合発振器では, 二つの Hopf 分岐が同時に起こる Hopf-Hopf 分岐が発生する. この結合では, 他の結合において h_{01} , h_{02} によって発生していた, 完全同相同期振動, 完全逆相同期振動が Hopf-Hopf 分岐 hh_0 によって同時に発生する. このとき, 二つの完全同期リミットサイクルは安定な状態で発生する.

完全同相同期のリミットサイクルは, 電圧結合の場合と同様に, 接線分岐 G_{01} によって消滅する. また, 完全逆走同期のリミットサイクルは Pf_{02} によって不安定となり, その近傍に生じた対称な位置にある 2 つの安定なリミットサイクルは NS_{02} によってトラスへと変化する. 更にパラメータを変化させることによって, それらは一つに癒着する (図 4.25). この現象と似た現象は電流結合の場合でも観測されている [11]. 従って, hh_0 と Pf_{02} , G_{01} の間の領域では, 安定な完全同相同期振動と完全逆相同期振動を同時に観測することができる.

4.4.2 交差結合の特徴

交差結合は非対称結合を二つにした形の結合となり, 非対称結合で接近していた 2 つの Hopf 分岐が, 一つにまとまって Hopf-Hopf 分岐に変化したと考えられる. また, 全てのポートを結合しているため, 電圧結合と電流結合でみられる, 安定な同期振動の特徴を両方持っている形になっている.

図 4.26 は交差結合で観測された安定なトラスとカオスである. 交差結合では, 他の結合では観測できなかった安定なカオスアトラクタやトラスが多数観測できる.

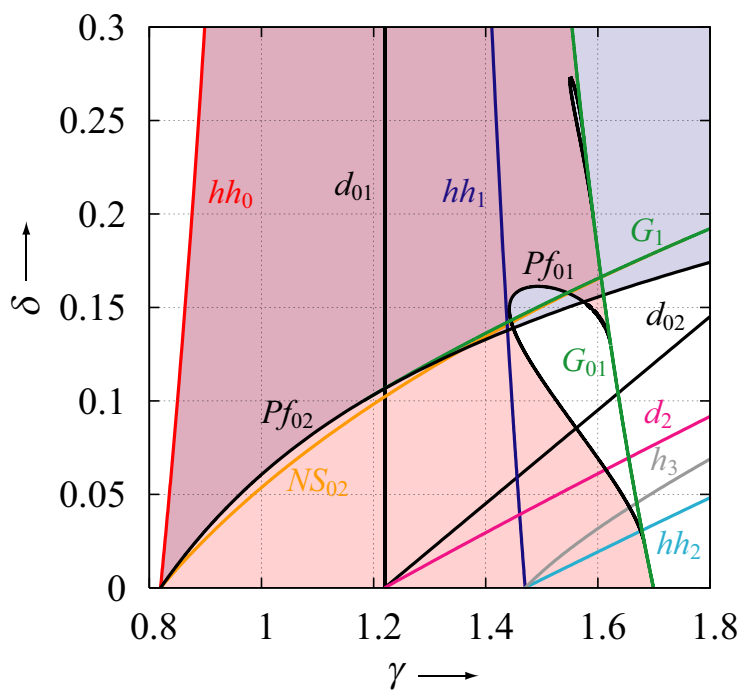


図 4.23 交差結合 BVP 発振器で起こる分岐

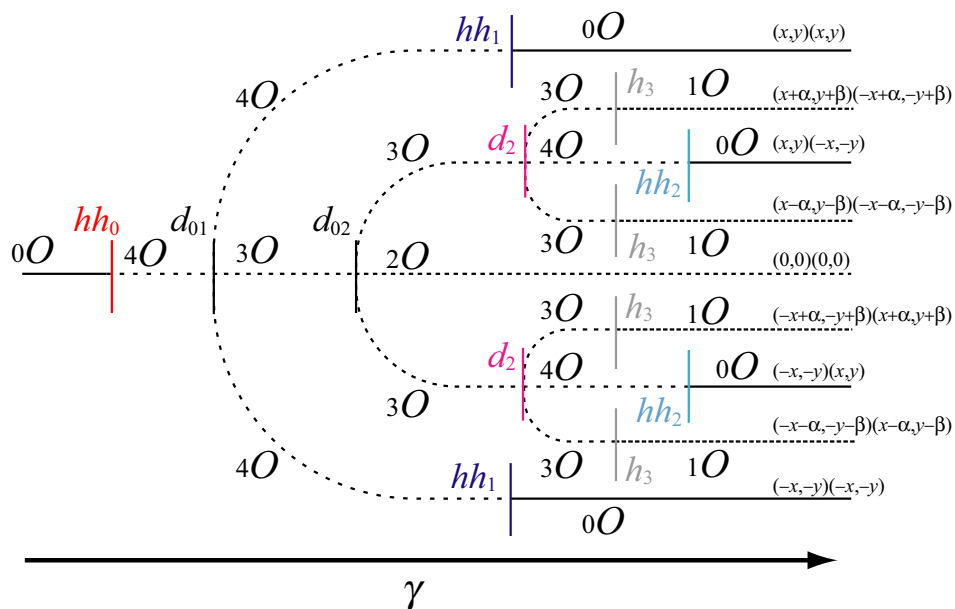


図 4.24 平衡点の安定性

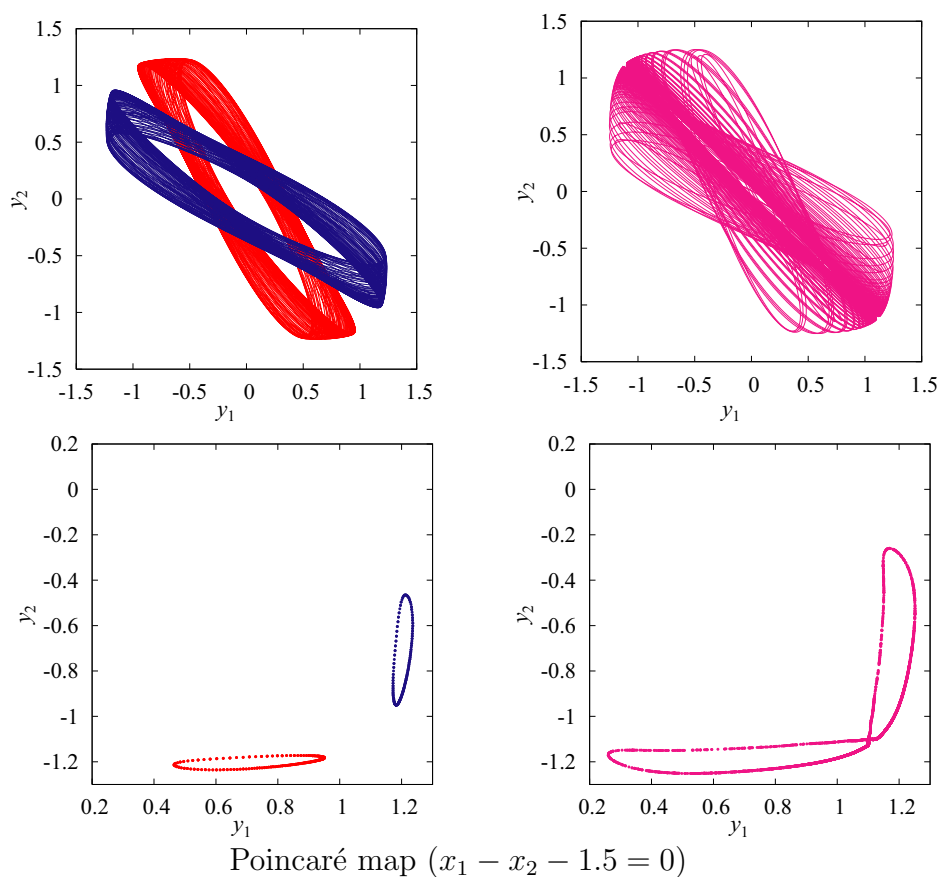


図 4.25 逆走同期リミットサイクル付近にできるトーラス

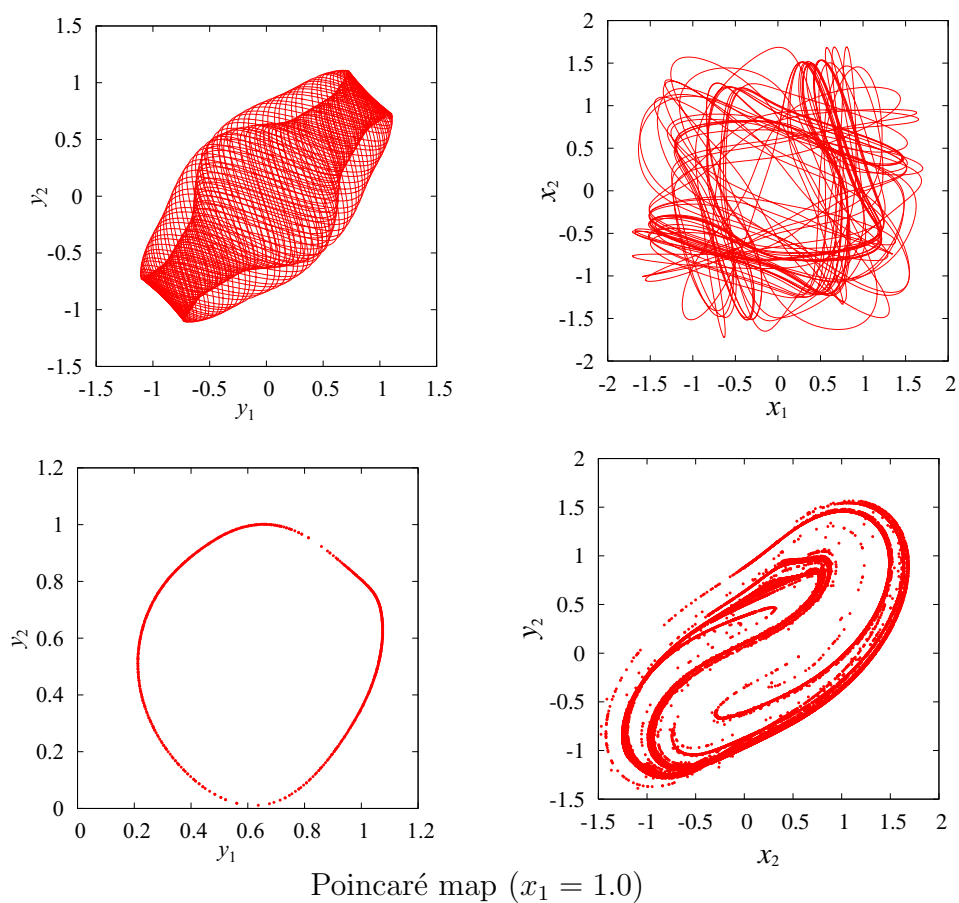


図 4.26 同相方向にできるトーラスと結合係数が小さい時に観測されるカオス

第5章

キャパシタで結合したBVP発振器

本章では，前章とは異なり結合方式を電圧結合と固定し，結合素子を線形抵抗からキャパシタに変更する．同じ条件で結合素子だけを変更した場合における分岐構造と観測されるアトラクタを比較することによって，結合素子としてのキャパシタの特性を理解することができる．

また，電圧ポートをキャパシタで結合した場合，キャパシタだけのループができるため，次元が一つ落ちることになる．従って，他の結合とは異なり線形抵抗で結合した場合と同じ4次元自律系システムとしてキャパシタ結合を解析することができる．このため，他の5次元自律系システムとなる他の結合方式と比べ，キャパシタ本来の性質を観察できるのではないかと考えられる．

5.1 電圧結合 BVP 発振器

図 5.1 は BVP 発振器の電圧ポート同士をキャパシタで繋いだ結合発振器であり，この回路の回路方程式は式 (5.1) となる．

$$\left\{ \begin{array}{l} C \frac{dv_1}{dt} = -i_1 - g(v_1) - i_0 \\ L \frac{di_1}{dt} = v_1 - ri_1 \\ C \frac{dv_1}{dt} = -i_2 - g(v_2) + i_0 \\ L \frac{di_2}{dt} = v_2 - ri_2 \\ C_0 \frac{dv_0}{dt} = i_0 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

式 (5.1) を正規化した方程式が式 (5.2) である．

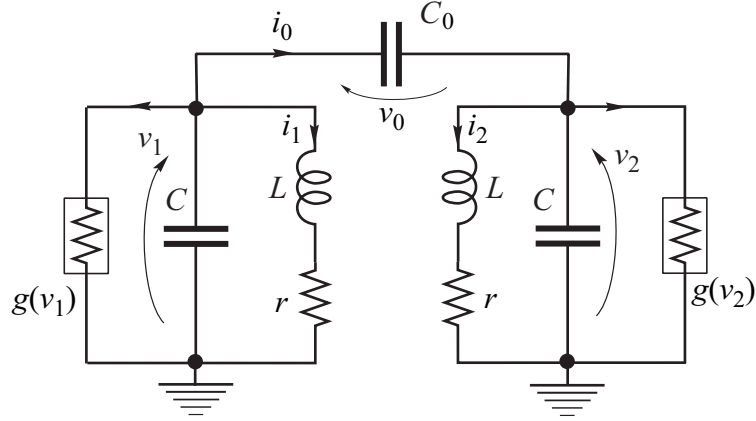


図 5.1 キャパシタ結合 BVP 発振器

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -\frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \{y_1 - \tanh \gamma x_1\} - \frac{\alpha}{2\alpha+1} \{y_2 - \tanh \gamma x_2\} \\ \frac{dy_1}{d\tau} = x_1 - \delta y_1 \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -\frac{\alpha}{2\alpha+1} \{y_1 - \tanh \gamma x_1\} - \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \{y_2 - \tanh \gamma x_2\} \\ \frac{dy_2}{d\tau} = x_2 - \delta y_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

このとき,

$$\tau = \sqrt{LC}\tau, \quad v_j = a\sqrt{\frac{L}{C}}x_j, \quad i_j = ay_j \quad (j = 1, 2)$$

$$\gamma = ab\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad k = r\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \alpha = \frac{C_0}{C}$$

となる.

5.1.1 キャパシタ結合で生じる分岐

図 5.2 に式 (5.2) の分岐図を示す. キャパシタで結合した場合, 平衡点の分岐は線形抵抗で結合した場合と同じであるが, リミットサイクルの分岐に関しては結合キャパシタの影響を大きく受ける. キャパシタ結合では, 線形抵抗で結合した場合と同じく, h_{01} で完全同相同期発振が安定に発生する. この完全同相同期なリミットサイクルは Pf_{01} によって不安定なリミットサイクルへと変化し, 接線分岐 G_{01} によって消滅する. また, h_{02} によって発生した不安定な完全逆相同期は NS_{02} の内側では安定なリミットサイクルとして存在している. 従って, h_{01} と Pf_{01} の間と, NS_{02} の内側が重なるパラメータ領域では, 完全同相同期と完全逆相同期が共存している状態となる. 図 5.3 は NS_{02} によって発生したトラスである.

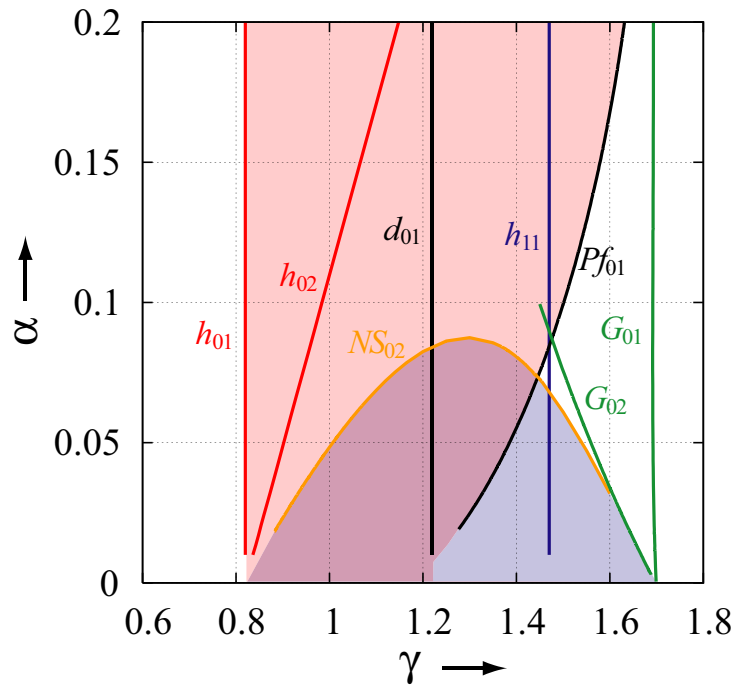


図 5.2 キャパシタ結合の分岐図

5.1.2 キャパシタ結合の特徴

キャパシタによる電圧結合では，結合キャパシタを流れる電流の位相がずれる．線形抵抗結合の場合には存在しないこの位相のずれが完全逆相同期を安定化させた原因ではないかと考えられる．図 5.4 はキャパシタ結合で見られる特徴的なカオスである．キャパシタ結合発振器には，これら線形抵抗結合ではみられなかった形状の安定なカオスアトラクタが存在している．そのため，これらのカオスアトラクタを発生させる複雑な分岐構造がまだ存在していると考えられる．

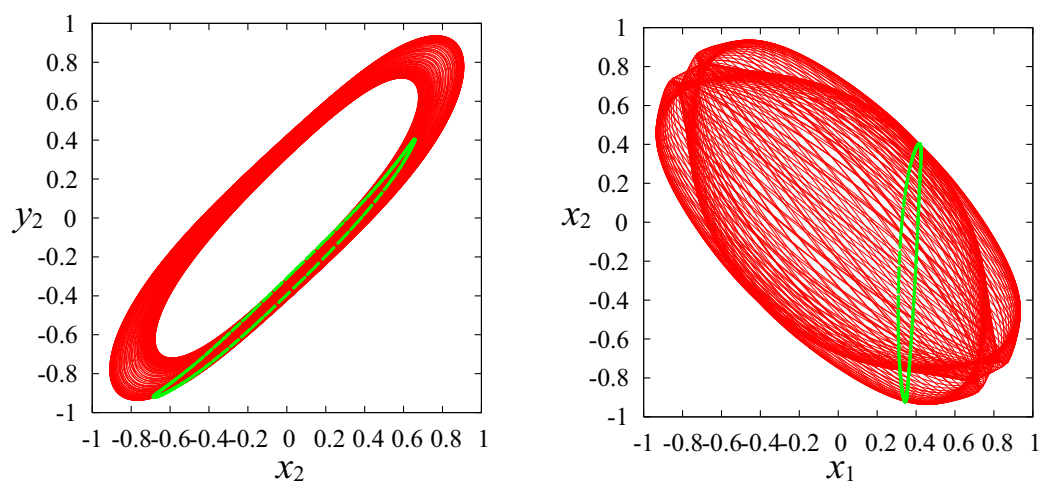


図 5.3 完全逆相同期振動から発生するトーラス

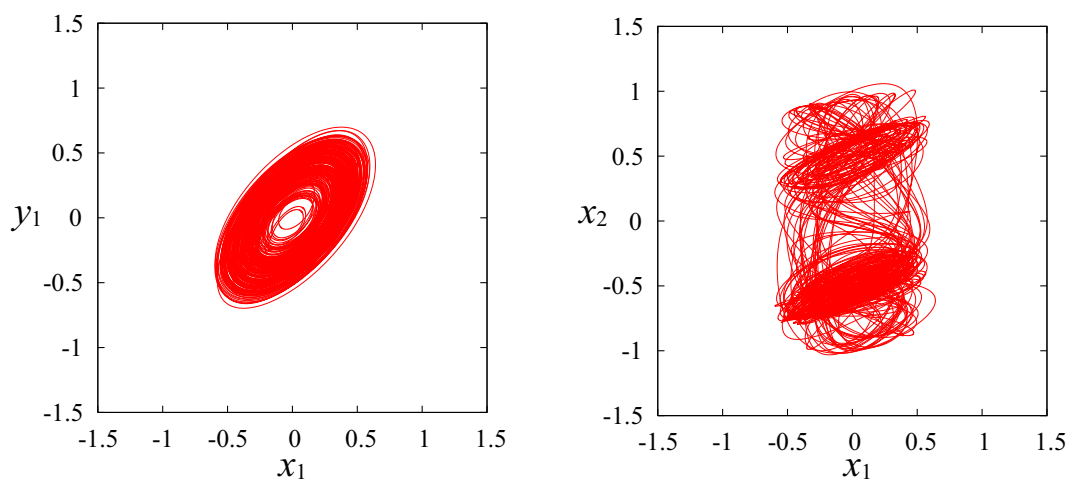


図 5.4 キャパシタ結合で見られる特徴的なカオス

第6章

まとめ

本論文では，単体 BVP 発振器，拡張された BVP 発振器，同一な BVP 発振器が 2 つ結合された場合について，非線形特性・正規化手法を統一することによって，それらの違いからくる影響を廃し，それぞれの場合における分岐構造や現れる現象について解析を行った．また，それぞれの発振器で観測されるアトラクタや分岐構造を比較することによって，BVP 発振器単体に接続された要素の影響や特徴を明らかにした．

各章ごとにまとめると以下となる：

第 2 章では基本となる単体の BVP 発振器について，パラメータ平面における分岐構造を明らかにし，各領域における発振器の状態を示した．また，単体 BVP 発振器に外部からの入力 (接続) があるシステムについて解析を行った．BVP 発振器のナルクラインによって各ポートの入力項の影響を示し，一定電流が入力された時の分岐図を明らかにした．これにより，外部入力がある場合，系の対称性が崩れ分岐構造が変化し，発振領域が減少することを明らかにした．また，外部からの入力に対する分岐図を求めることによって，入力電流の変動で発振器の状態が大きく影響を受けることを示した．

第 3 章では BVP 発振器にキャパシタを接続した変形 BVP 発振器と，更に変形 BVP 発振器にコイルと抵抗を追加した回路である簡略化 v - i 結合 BVP 発振器について解析を行った．変形 BVP 発振器では同一容量のキャパシタが接続されることにより，3 次元自律系発振器となっているため，カオスアトラクタ等の 2 次元では存在しない現象がみられるが，分岐構造を調べた結果，単体 BVP 発振器と似た構造を持ち，さらに周期倍分岐連鎖によってカオスアトラクタが発生していることを明らかにした．また，系の対称性が強い場合複数の分岐が同時に起こる現象が観測でき，他の 3 次元自律系システムでは存在しない特異な応答が存在している．この特異な応答は強い対称性を持つ多様体構造によって実現したものであり，その構造から basin boundary の構造が消失してしまう現象が観測できることを明らかにした．次に，簡略化 v - i 結合 BVP 発振器では，変形 BVP 発振器と同じ分岐によってカオスアトラクタが発生していることを明らかにした．また，次元とパラメータの数が増えることによって，変形 BVP 発振器と比べ，分岐曲線が分解されていることがわかり，この分岐構造が v - i 結合 BVP 発振器に近付いていることを明らかにした．

第 4 章では線形抵抗によって 2 つの同一 BVP 発振器を結合したモデルの解析を行った．解析した結合方式は，電圧結合，電流結合，非対称結合，交差結合の 4 つである．平衡点の分岐に関しては結合形式による違いはそれほど小さくなく，非線形特性を変化させることで，

- 原点が Hopf 分岐を起こしてリミットサイクルを発生させる．

- 原点の D 型分子により対象な位置に平衡点が発生する.
- 原点から発生した平衡点が Hopf 分岐を起こす.

という, 単体 BVP 発振器と同様の分岐現象が観測できた. しかし, Hopf 分岐で発生したリミットサイクルに関しては結合方式の影響を大きく受け, 特に同期発振については, 以下に挙げる各結合方式の特徴がみられた.

- 電圧結合 BVP 発振器では, 強い安定性を持つ完全同相同期リミットサイクルが原点の Hopf 分岐により発生し, 完全逆相同期リミットサイクルは不安定な状態で発生する. そして, 電圧結合 BVP 発振器ではほとんどの領域でこの安定な完全同相同期振動が観測される.
- 電流結合では電圧結合と異なり, 完全逆相同期リミットサイクルが安定な状態で原点から発生する. 大部分の領域で安定な完全逆相同期振動が観測できるが, 電圧結合と違い結合強度が弱い領域で完全同相同期振動も安定に存在する. また, 電圧結合と違いこれらの同期リミットサイクルから発生したリミットサイクルがトラスやカオスへ変化する複雑な分岐構造が存在する.
- 非対称結合 BVP 発振器では, 他の結合と異なり位相のずれた同期発振が安定に観測できる. この結合方式では電圧結合と同様に同期振動の安定性が強く, 電流結合のような複雑な分岐現象は観測できない. また, 上の二つの結合とくらべ, 1つの平衡点が起こす2つの Hopf 分岐が接近しているという特徴がある.
- 交差結合の場合, 2つの線形抵抗で非対称結合を2重に行っている結合であり, 非対称結合で接近していた2つの Hopf 分岐が重なって同時に Hopf 分岐を起こす Hopf-Hopf 分岐へと変化している. この結合では安定な完全同相同期リミットサイクルと完全逆相同期リミットサイクルが安定な状態で同時に発生している. 従って, この結合方式では二つの完全同期振動が共存して安定に観測できる. また, この分岐では他の分岐と比べ安定なリミットサイクルの分岐が多数存在している.

第5章ではBVP発振器をキャパシタで接続したモデルの解析を行った. 本来, キャパシタで結合した発振器は, 次元が1つ大きくなる. しかし, 電圧ポート同士を結合した回路では, キャパシタのみのループができるため次元が退化し, 線形抵抗で結合した場合と同じ4次元自律系システムとなる. そこで, 線形抵抗結合とキャパシタ結合の間で分岐構造や観測される現象を比較することで, キャパシタを結合に用いたときの特徴を明らかにした. 各発振器間を流れる電流が振動している場合, 結合素子であるキャパシタを流れる電流は位相がずれる. つまり, リミットサイクルの分岐に関して, キャパシタの特性がより大きく現れていることがわかる. 分岐構造から平衡点に関しては線形抵抗による電圧結合の特徴が現れており, リミットサイクルの分岐に関しては電流結合と似た構造とアトラクタの分岐が観測できた.

本研究において, BVP 発振器に素子を加えて拡張した回路, BVP 発振器を2個結合した回路に関して, 分岐構造や同期振動について明らかにした. ある程度のモデルに関してはこれらの結果から類推することは可能であるが, 全ての結合や素子についてどのような影響を受けるかを網羅したわけではない. 今後の課題としては, キャパシタによる他の結合形式や他の拡張 BVP 回路に関しても, 分岐構造やアトラクタを解明, 比較, 検証することが挙げられる.

付録

A 非線形力学系にみられる分岐

常微分方程式で記述される力学系にみられる平衡点, 周期解が, 式のパラメータを徐々に変えていくことにより, 急激にそれらの定性的性質を変化させる現象がみられ, これらは分岐現象と呼ばれる. 平衡点や周期点などの極限集合の位相的安定正が交替することによって分岐現象がみられる. この時のパラメータは分岐パラメータと呼ばれる.

本章では, 次章以降に行う解析の前に一般的な自律系システムにみられる平衡点, 及び周期解の安定性と分岐について述べる.

A.1 平衡点の安定性

次の常微分方程式で記述される n 次元自律系を考える.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad t \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (\text{A.1})$$

ここで, t は時刻を表す実数であり, \mathbf{x} は状態変数である. また \mathbf{f} は, 連続でかつ必要な回数だけ微分可能であるとする. $\lambda \in \mathbf{R}$ はパラメータとし, \mathbf{f} は λ についても微分可能であるとする.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

を満足する点 \mathbf{x}_0 を平衡点 (equilibrium point) という. 平衡点はそれ自身で式 (A.1) の解となっており全ての時刻に対して静止している状態を表している.

この平衡点から微少量のずれを $\boldsymbol{\xi}(t)$ とする. ここで, $\boldsymbol{\xi}(t)$ を \mathbf{x}_0 の変分 (variation) という. 変分に対する方程式を得るため点

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}(t) \quad (\text{A.3})$$

の運動を考える. 変分 $\boldsymbol{\xi}(t)$ が十分に小さいものとする, 右辺をテイラー展開し

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\xi}(t) + \cdots = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\xi}(t) + \cdots \quad (\text{A.4})$$

となる. ここで, \cdots の項は $\boldsymbol{\xi}(t)$ の 2 次以上の項を表す. 式 (A.3) と式 (A.4) より $\boldsymbol{\xi}(t)$ の線形部分を取り出すと

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(t) \quad (\text{A.5})$$

を得る. ここで \mathbf{A} は,

$$\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0} \quad (\text{A.6})$$

であり, ヤコビ行列という. 式 (A.5) を平衡点 \mathbf{x}_0 に関する変分方程式, または線形化方程式という.

線形化方程式の特性方程式を

$$\chi(\mu) = \det(\mu \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + a_2 \mu^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n = 0 \quad (\text{A.7})$$

表 A.1 2 次の特性方程式の係数と平衡点のタイプとの関係

平衡点のタイプ	特性方程式の係数が満たすべき条件
$_0O$ (沈点)	$a_1 > 0, a_2 > 0$
$_1O$ (サドル)	$a_2 < 0$
$_2O$ (源点)	$a_1 < 0, a_2 > 0$

とすると、その係数 (固有値) により平衡点の安定性を吟味することができる。ここで、 \mathbf{I}_n は $n \times n$ の単位行列を表す。2次元の場合の特性方程式は

$$\mu^2 + a_1\mu + a_2 = 0 \quad (\text{A.8})$$

となる。この場合に生じる平衡点のタイプを表 A.1 に示す。

A.2 平衡点の分岐

次式で表される n 次元自律系の平衡点が、パラメータ $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^m$ の値の変化に対してどのような定性的変化を伴うかという問題を考える。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^m \quad (\text{A.9})$$

平衡点 \mathbf{x}_0 の座標は

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (\text{A.10})$$

の根で与えられる。したがって、パラメータ変化に伴う平衡点の個数の変化は、式 (A.10) のヤコビ行列が特異点となる点でおこる。言い換えると、ヤコビ行列の固有値に零が含まれると平衡点は重複し、個数に変化をもたらす。もう一つの定性的変化は平衡点の安定性の変化である。これは、ヤコビ行列の固有値が純虚数となった場合起こる可能性がある。これらの2つの場合のいずれも、平衡点が双曲的性質を失った場合であることに注意する。すなわち、平衡点の質的变化はパラメータの変化に伴って、平衡点が双曲的性質を失うパラメータの値で生じることとなる。この現象を平衡点の分岐 (bifurcation) という。分岐の起こるパラメータを分岐値 (bifurcation value) という。以下、分岐に関係した固有値 μ は分岐値 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$ において

$$\left. \frac{d\text{Re}(\mu)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} \neq 0 \quad (\text{A.11})$$

を満たすと仮定する。これは、パラメータが変化したときに確かに分岐が起こる条件とってよい。以下、 $\boldsymbol{\lambda}$ の m 個の成分のうち $m-1$ 個を固定し、残りの1個を変えるものとする。したがって、 $\boldsymbol{\lambda}$ はスカラー $\lambda \in \mathbf{R}$ とする。平衡点のヤコビ行列を

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \lambda) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \lambda)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}(\lambda) \quad (\text{A.12})$$

とおき、この行列の特性方程式を

$$\chi(\mu) = \det(\mu \mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\lambda)) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + a_2\mu^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\mu + a_n = 0 \quad (\text{A.13})$$

とする。双曲型平衡点では、すべての特性根について

$$\text{Re}(\mu_i) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.14})$$

となっている。

パラメータを変化させたとき、特性根についてこの条件が一つでも崩れると、そのパラメータ値で分岐が起こる。平衡点の分岐は、以下に示す接線分岐、Hopf 分岐、D 型分岐の3種類が一般的である。

A.2.1 Saddle-Node 分岐

特性根の1つ $\mu_i = 0$ となると、式 (A.10) は一般に重根を持ち、パラメータの変化によって、平衡点対の消滅あるいは発生をみる。このとき、残りの特性根の性質は変化しないとすると、対となって出現あるいは消滅する平衡点は、不安定不変部分空間の次元が1だけ異なるものとなる。すなわち分岐のタイプは次式となる。

$${}_kO + {}_{k+1}O \Leftrightarrow \phi, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (\text{A.15})$$

ここで、 ϕ は、平衡点が存在しないことを表す。 O は平衡点を表し、左下添字は不安定次元数を表す。この平衡点対の発生・消滅の分岐を接線分岐 (tangent bifurcation) という。

接線分岐の生じる条件は、特性根の一つが零根となることから、式 (A.13) より以下となる。

$$\chi(0) = \det(-\mathbf{A}(\lambda)) = a_n = 0 \quad (\text{A.16})$$

A.2.2 Hopf 分岐

1組の特性根が複素平面上で虚軸を横切る場合を考える。左半平面から右半平面に移動したとすると、不安定部分空間の次元は2だけ大きくなる。このとき、渦心点となった平衡点からリミットサイクルが湧き出したり、あるいは渦心点へリミットサイクルが吸い込まれ消滅する。この分岐を Hopf 分岐 (Hopf bifurcation) という。分岐式で表すと

$$\begin{aligned} {}_kO &\Leftrightarrow {}_{k+2}O + LC({}_kD), \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \\ {}_kO + LC({}_{k+1}D) &\Leftrightarrow {}_{k+2}O, \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

となる。ここで、 $LC({}_kD)$ はリミットサイクルを表し、次節で説明する Poincaré 写像による固定点の性質が ${}_kD$ タイプであることを示す。また、方程式が2次元の場合、 $k = 0$ より式 (A.17) の一つ目の式は安定平衡点 (沈点) が Hopf 分岐を生じ安定なリミットサイクルの発生、消滅がみられることから Supercritical Hopf 分岐と呼ばれ、二つ目の式は不安定平衡点 (源点) が Hopf 分岐を生じ不安定なリミットサイクルの発生、消滅がみられることから Subcritical Hopf 分岐と呼ばれる。

Hopf 分岐が生じる条件は以下となる。

$$\chi(j\omega) = \det(j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\lambda)) = 0 \quad (\text{A.18})$$

ここで、 \mathbf{I}_n は $n \times n$ の単位行列である。この式は、実部と虚部から条件式が2つ出てくるが、 ω が未知周波数なので両式からこれを消去すると1つの条件となる。なお、 ω は Hopf 分岐により生じる (または消滅する) リミットサイクルの角周波数を表す。

A.2.3 D 型分岐

系にある対称性がみられる場合、特性根の1つが0となるパラメータ値において、平衡点の枝分かれが起こる。

$$\begin{aligned} {}_kO &\Leftrightarrow {}_{k+1}O + 2{}_kO \\ {}_kO + 2{}_{k+1}O &\Leftrightarrow {}_{k+1}O \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

A.3 周期解の安定性

前節と同様に、次の n 次元自律系を考える.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (\text{A.20})$$

また \mathbf{f} は、連続でかつ必要な回数だけ微分可能であるとする.

式 (A.20) の周期解とは、ある正数 L があって

$$\mathbf{x}(t+L) = \mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbf{R} \quad (\text{A.21})$$

の性質を持つ解のことである. この正数 L をこの周期解の周期という.

いま、式 (A.20) の解を

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}(0) = \varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{A.22})$$

と書くことにする. 式 (A.21) の周期解があったとして、初期値 \mathbf{x}_0 をこの解となるように選んだとする. すると、式 (A.22) は周期解を表し、式 (A.21) の性質は

$$\mathbf{x}(L) = \varphi(L, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{A.23})$$

と書くこともできる. つまり、この式を満足する正数 L と初期値 \mathbf{x}_0 を持つ解があれば、それは周期解である. 状態空間内での集合:

$$\gamma(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | \mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathbf{x}_0), t \in [0, L]\} \quad (\text{A.24})$$

を周期軌道 (periodic orbit) または閉軌道 (closed orbit) という. 周期軌道上の任意の初期値を出発する解は、式 (A.23) の性質を持つ.

周期 L の周期解の近傍に別の周期解が存在しないとき、つまり孤立した周期解となっているとき、この周期解を極限閉軌道 (リミットサイクル, limit cycle) という.

周期解の特徴は、状態が 1 周期毎に元の状態に還ってくる式 (A.21) の性質である. すなわち周期軌道は、状態空間内で閉曲線となっていて周期解はこの曲線上でのみ運動している. この性質を用いて周期解の近傍の解の様子を幾何学的に考察する手法が、19 世紀末に Poincaré によって提案された.

いま、周期 L の周期解があったとして、これを式 (A.22) で表したとする. このとき、初期値 \mathbf{x}_0 は周期軌道上どこに取ってもよい. また、周期軌道の近くの解軌道はほぼ周期軌道に平行に走っている. そこで、これらの軌道に横断的な超曲面 Π を 1 つ考えて、初期値をこの曲面上に限定して与えることにする. すると、解曲線と初期値の間に対応関係を定義できる. このことを定式化する.

まず、超曲面 Π を関数:

$$q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}; \quad \mathbf{x} \mapsto q(\mathbf{x}) \quad (\text{A.25})$$

を用いて

$$\Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | q(\mathbf{x}) = 0\} \quad (\text{A.26})$$

で定義する. いま考えている周期解は、点 $\mathbf{x} \in \Pi$ でこの超曲面を横切るものとする. すなわち、解

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.27})$$

が周期解とする. すると、この周期解と超曲面 Π が横断的に交わる条件は

$$\frac{\partial q(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0 \quad \text{for all } \mathbf{x}_0 \in \Pi \quad (\text{A.28})$$

となる．ベクトル場 \mathbf{f} と横断的に交わる超曲面は一般に局所的にしか定義できない．式 (A.28) が成り立てば，点 \mathbf{x}_0 の近傍で超曲面が局所的に存在することがいえる．この超曲面 Π のことを周期解である式 (A.27) に関する局所断面 (local cross section) という．

さて，このような局所断面を適切に選んだとする．すると，超曲面上の点 $\mathbf{x}_0 \in \Pi$ の近傍 $\Delta \subset \Pi$ から Π への写像 T を，解曲線を使って次のように定義することができる．

$$T: \Delta \rightarrow \Pi; \quad \mathbf{x} \mapsto \varphi(\tau, \mathbf{x}) \quad (\text{A.29})$$

ここで， τ は初期値 $\mathbf{x} \in \Delta \subset \Pi$ を出発した解 $\varphi(\tau, \mathbf{x})$ が再び最初に Π と交わるまでの時間を表す． τ は \mathbf{x} の関数となっている．この時間 τ を最初の帰還時間 (first return time) または単に帰還時間という．また，写像 T は Poincaré 写像 (Poincaré map) または帰還写像 (return map) と呼ばれている．図 A.1 参照．

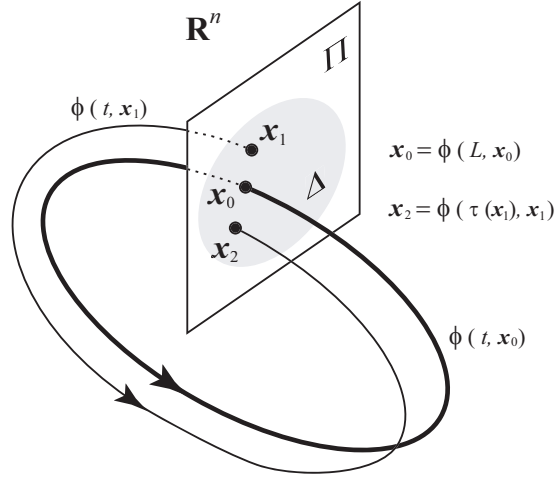


図 A.1 周期解と Poincaré 写像

写像 T を用いると，周期解の初期値は

$$T(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{A.30})$$

で表される T の固定点となる．また帰還時間は

$$\tau(\mathbf{x}_0) = L \quad (\text{A.31})$$

となり，周期解の周期となる．したがって，周期解である式 (A.27) と写像 T の固定点 \mathbf{x}_0 の間に 1:1 の対応関係ができる．

以上のことから，Poincaré 写像を用いると，周期解の問題は状態空間の次元が 1 次元小さい局所断面上の離散力学系の問題に換言できることが分かる．したがって，周期解の安定性は，Poincaré 写像の固定点での安定性を考えればよい．

A.4 Poincaré 写像の固定点の安定性

Poincaré 写像の固定点、式 (A.30) の安定性を考察するために，固定点の近傍についての変分を考える：

$$\xi(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_0 \quad (\text{A.32})$$

これを式 (A.29) に代入, テイラー展開を施し, 式 (A.30) の関係を用いると次の差分方程式を得る.

$$\boldsymbol{\xi}(k+1) = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\xi}(k) \quad (\text{A.33})$$

式 (A.33) のヤコビ行列 $\partial T / \partial \mathbf{x}_0$ は, Poincaré 写像 である式 (A.29) の初期値の微分によって得られるが, 帰還時間は初期値に依存するので, chain rule によって,

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0} + \mathbf{f} \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (\text{A.34})$$

となる. 式中で \mathbf{f} と書いたが, 実際は値 \mathbf{x}_0 を代入した \mathbf{f} の値 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(\tau(\mathbf{x}_0)))$ を指す. この後も適当に記号の省略を行なう.

さて, 式 (A.34) の右辺第 1 項は, 次の線形常微分方程式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (\text{A.35})$$

を初期値

$$\left. \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0} \right|_{t=0} = \mathbf{I}_n \quad (\text{A.36})$$

とともに $t = 0$ から $t = \tau(\mathbf{x}_0)$ まで数値積分すれば得られる基本行列解であり, これに関する特性方程式:

$$\xi(\mu) = \left| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0} - \mu \mathbf{I}_n \right| = 0 \quad (\text{A.37})$$

の根によって, 固定点の安定性が判別される.

ところで, $q(\mathbf{x}_1) = q(\boldsymbol{\varphi}(\tau(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0)) = 0$ を初期値 \mathbf{x}_0 で微分すると,

$$\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0} + \mathbf{f} \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{x}_0} \right) = 0 \quad (\text{A.38})$$

この式は $(1 \times n)$ の空間上の式になっていることに注意. これより,

$$\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{x}_0} = - \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (\text{A.39})$$

である. 式 (A.28) の条件を用いて,

$$\frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{x}_0} = - \frac{1}{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}} \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (\text{A.40})$$

これを式 (A.34) に代入して, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} &= \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0} - \frac{1}{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}} \mathbf{f} \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0} \\ &= \left[\mathbf{I}_n - \frac{1}{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}} \mathbf{f} \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_0} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

この DT が Poincaré 写像、式 (A.29) の微分値, つまりヤコビ行列である. よって, 特性方程式:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} - \mu \mathbf{I}_n = 0 \quad (\text{A.42})$$

表 A.2 2次元写像の固定点のタイプ

記法	固定点の名称	特性根の条件
${}_0D$	完全安定 (completely stable)	$ \mu_1 < 1, \mu_2 < 1$
${}_1D$	正不安定 (directly unstable)	$0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$
${}_1I$	逆不安定 (inversely unstable)	$\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$
${}_2D$	完全不安定 (completely unstable)	$ \mu_1 > 1, \mu_2 > 1$

を解析することにより、固定点の位相的性質を調べることができる。

2次元の場合の特性方程式の係数と固定点のタイプとの関係を、表 A.2 に示す。一般に、位相的に性質の異なる固定点は、全部で以下の $2n$ 個となる。

$${}_mD \ (m = 0, 1, \dots, n), \quad {}_mI \ (m = 0, 1, \dots, n-1) \quad (\text{A.43})$$

Poincaré 写像である式 (A.29) は、 n 次元空間で定義されており、式 (A.41) には、固定点の周期解情報がそのまま埋め込まれている。すなわち、特性方程式 (A.42) を解くと、その n 個の特性乗数 (固有値) のうち、一つは必ず 1 となる。これを周期解条件といい、固有ベクトル方向の軌道の伸び縮みはないことを示している。特性乗数 1 に対応する固有ベクトルは \mathbf{f} となる。本質的にこの不変な情報は冗長であり、数値計算にも悪影響を及ぼす。よって、以下に述べる局所座標系を導入することによって、この方向の情報を取り除き、数値計算を具体的に進める。

まず、局所断面上に $n-1$ 次元の局所座標系 Σ を取り付ける。具体的には Π から Σ への射影 (projection) を考えればよい：

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid q(\mathbf{x}) = 0, q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}\} \\ h: \Pi &\rightarrow \Sigma \subset \mathbf{R}^{n-1} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

この射影 h を Π の局所座標という。 h の逆写像を h^{-1} と書き、これを埋め込み写像という。さて、 Π の局所座標の値 (座標値) として $\mathbf{u} \in \Sigma \subset \mathbf{R}^{n-1}$ が観測できるとする。 $h(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0$ と書くとき、 $\mathbf{u}_0 \in \Sigma$ の近傍の点 $\mathbf{u}_1 \in \hat{\Sigma} \subset \Sigma$ に対して、 $h^{-1}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{x}_1 \in \hat{\Pi}$ を初期値とする式 (A.20) の解 $\varphi(t, \mathbf{x}_1)$ が再び Π と交わる点を \mathbf{x}_2 、その時刻を $\tau(\mathbf{x}_1)$ とする：

$$\mathbf{x}_2 = \varphi(\tau(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_1) \quad (\text{A.45})$$

これらを用いて局所座標系 Σ 上の写像：

$$\begin{aligned} T_\ell &: \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma \\ \mathbf{u}_1 &\mapsto \mathbf{u}_2 = h(\varphi(\tau(h^{-1}(\mathbf{u}_1)), h^{-1}(\mathbf{u}_1))) \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

を定義する。書き換えると、

$$\begin{aligned} T_\ell &: \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma \\ \mathbf{u}_1 &\mapsto \mathbf{u}_2 = h \circ T \circ h^{-1}(\mathbf{u}_1) \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

となっている。

$$T_\ell(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_0 \quad (\text{A.48})$$

のとき, \mathbf{u}_0 は固定点であるといい, 対応する $\mathbf{x}_0 = h^{-1}(\mathbf{u}_0)$ も写像 T の固定点となっている. このとき,

$$q(\varphi(\tau(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0)) = 0 \quad (\text{A.49})$$

となっていることに注意する.

さて, 式 (A.46) は, 次の n 次元方程式,

$$F(\mathbf{u}, \tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{u} - T_\ell(\mathbf{u}) \\ q(\varphi(\tau(\mathbf{x}), \varphi)) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{A.50})$$

を未知数 \mathbf{u} および τ について Newton 法で解くとよい. ここで, 問題となるのは F の微分, すなわち T_ℓ の微分値をどう求めるかである. 式 (A.47) の微分を考えると, “合成写像の微分は各写像のヤコビ行列同士の積となる” という解析学の結果を用いることができる.

$$\frac{\partial T_\ell}{\partial \mathbf{u}_0} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial(h^{-1})}{\partial \mathbf{u}} \quad (\text{A.51})$$

よって, 式 (A.41) より,

$$\frac{\partial T_\ell}{\partial \mathbf{u}_0} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \left[\mathbf{I}_n - \frac{1}{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}} \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial(h^{-1})}{\partial \mathbf{u}} \quad (\text{A.52})$$

となる.

A.5 周期解の分岐

周期解の分岐は, Poincaré 写像の固定点・周期点の分岐と考える. そこで, 次の離散時間力学系を考える.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) \quad (\text{A.53})$$

いま, 式 (A.53) の解を

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathbf{x}, \lambda), \quad \varphi(0, \mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x} \quad (\text{A.54})$$

とし, Poincaré 写像を

$$T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n; \mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) = \varphi(L, \mathbf{x}, \lambda) \quad (\text{A.55})$$

で定義する. また, 式 (A.53) が周期 L の周期解を持つとして, これに対応する固定点方程式:

$$T(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = 0 \quad (\text{A.56})$$

を満たす固定点を $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, その特性方程式を

$$\chi(\mu) = \det(\mu \mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\lambda)) = \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + a_2 \mu^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n = 0 \quad (\text{A.57})$$

とする. ここで,

$$DT(\mathbf{x}_0, \lambda) = \frac{\partial T(\mathbf{x}_0, \lambda)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \varphi(L, \mathbf{x}_0, \lambda)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}(\lambda) \quad (\text{A.58})$$

とおいた. 固定点の双曲性が崩れ, 固定点が分岐を起こすのは, 式 (A.57) の特性根の一つが, 複素平面上の単位円上に位置する場合である. 固定点の分岐は, 以下に示す接線分岐, 周期倍分岐, ネイマルク・サッカード分岐の 3 種類となる.

A.5.1 接線分岐 (tangent bifurcation)

パラメータの変化に伴って、2つの対になった固定点が癒着消滅、あるいは発生する分岐である。この分岐は特性根の一つが 1 となる場合におこる。すなわち、分岐の条件は

$$\chi(1) = \det(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\lambda)) = 1 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = 0 \quad (\text{A.59})$$

となる。分岐の起こる固定点对としては

$$\begin{aligned} {}_k D + {}_{k+1} D &\Leftrightarrow \phi, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \\ {}_k I + {}_{k+1} I &\Leftrightarrow \phi, \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

のいずれかである。

A.5.2 周期倍分岐 (period doubling bifurcation)

この分岐は、特性根の 1 つが -1 を横切る場合に生じる。分岐後、固定点は安定性が変化し、対になった 2-周期点の発生 (あるいは消滅) をみる。分岐の条件は

$$\chi(-1) = \det(-\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\lambda)) = (-1)^n + a_1(-1)^n + \cdots - a_{n-1} + a_n = 0 \quad (\text{A.61})$$

となる。また、分岐式は

$$\begin{aligned} {}_k D &\Leftrightarrow {}_{k+1} I + 2 \times {}_k D^2, \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \\ {}_k D &\Leftrightarrow {}_{k-1} I + 2 \times {}_k D^2, \quad (k = 2, 3, \dots, n) \\ {}_k I &\Leftrightarrow {}_{k+1} D + 2 \times {}_k D^2, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \\ {}_k I &\Leftrightarrow {}_{k-1} D + 2 \times {}_k D^2, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

となる。ここで、 ${}_k D^2$ はタイプが D 型の 2-周期点で、その不安定次元が k であることを表す。

A.5.3 ネイマルク・サッカー分岐 (Neimark-Sacker bifurcation)

1 組の複素特性根が、複素平面上の単位円を横切る分岐である。平衡点のホップ分岐に対応する固定点の分岐といえる。分岐の条件は

$$\chi(e^{j\theta}) = \det(e^{j\theta} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\lambda)) = e^{jn\theta} + a_1 e^{j(n-1)\theta} + \cdots + a_{n-1} e^{j\theta} + a_n = 0 \quad (\text{A.63})$$

となる。一般にこの分岐が起こると、固定点の周りに写像 T によって不変な閉曲線が発生または消滅する。分岐式のタイプは

$$\begin{aligned} {}_k D &\Leftrightarrow {}_{k+2} D + ICC, \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \\ {}_k D + ICC &\Leftrightarrow {}_{k+2} D, \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

である。ここで、 ICC は不変閉曲線 (invariant closed curve) を表す。

謝辞

本論文の全過程を通じ、直接理解ある御指導と御鞭撻を賜りました徳島大学高度情報化基盤センター 上田 哲史 助教授に心より感謝の意を表します。

本論文の作成にあたり貴重な示唆を賜りました徳島大学工学部電気電子工学科木内陽介 教授，同学部知能情報工学科 大恵 俊一郎 教授，同大学高度情報化基盤センター 北研二 教授に心から御礼申し上げます。

懇切な御指導，御教示を頂きました徳島大学副学長 川上 博 教授に心から感謝の意を表します。

本論文の作成にあたり有益な御助言を頂きました徳島大学工学部電気電子工学科 入谷忠光 教授に御礼申し上げます。

日頃有益な御助言，暖かい励ましの言葉を頂きました，徳島大学医学部保健学科 吉永哲哉 教授 および 藤本 憲市 助手，大分大学工学部機械・エネルギーシステム工学科 高坂拓司 助教授，独立行政法人科学技術振興機構 ERATO 合原複雑数理モデルプロジェクト 津元 国親 研究員 および 辻 繁樹 研究員に深く感謝致します。

国際会議，国内の学会・研究会などで，有益な御助言，御激励を頂きました，徳島大学工学部電気電子工学科 西尾 芳文 助教授，香川大工学部信頼性情報システム工学科 北島博之 助教授に心から感謝の意を表します。

学会・研究会，研究室での活動において暖かい励ましの言葉を頂きました徳島大学工学部知能情報工学科 寺田 賢治 助教授，辻 明典 技術員，B1 講座の学生およびOBの方々，徳島大学工学部電気電子工学科 西尾研究室の学生の方々に感謝致します。

文献

参考文献

- [1] 川上 博 編著, 生体リズムの動的モデルとその解析, コロナ社, 2001 年.
- [2] 林 初男 著, 神経システムの非線形現象, コロナ社, 1998 年.
- [3] 辻 繁樹, “分岐理論に基づいた神経細胞モデルの構築とその結合系の解析,” 徳島大学博士論文, 2005.
- [4] K. Tsumoto, T. Yoshinaga, H. Iida, H. Kawakami and K. Aihara, “Bifurcations in a mathematical model for circadian oscillations of clock genes,” *Journal of Theoretical Biology*, Vol.239, No.1, pp.101–122, 2006.
- [5] 吉永 哲哉, “非線形回路にみられる余次元 2 の分岐および結合発振器回路の解析,” 慶應義塾大学博士論文, 1992.
- [6] O. Papy, “Analysis and Simulation of Bifurcation and Chaos in Coupled Oscillators,” PhD Thesis. Tokushima University, 1996.
- [7] 北島 博之, “非線形の構造に基づく分岐現象とカオスの解析,” 徳島大学博士論文, 1998.
- [8] 上田 哲史, 高坂 拓司, 宮崎 久代, 川上 博, “結合 BVP 発振器の分岐とカオス,” 信学技報, NLP2000-166, pp.17–24, 2001 年 3 月.
- [9] 宮崎 久代, 上田 哲史, 高坂 拓司, 川上 博, “BVP 発振器の結合方式と分岐について,” 信学技報, NLP2001-45, pp.35–42, 2001 年 9 月.
- [10] 上田 哲史, 川上 博, “変形 BVP 発振器に生じる周期解の分岐とカオス,” 信学技報, NLP2001-63, pp.71–78, 2001 年 3 月.
- [11] S. Tsuji, T. Ueta, and H. Kawakami. “Bifurcation Analysis of Current Coupled BVP Oscillators,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 17, No. 3, 2007.
- [12] L. O. Chua, M. Komuro, and T. Matsumoto, “A Universal Circuit for Studying and Generating Chaos,” *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol.40, No. 10, pp.732–761, 1993.
- [13] T. Matsumoto, L. O. Chua and R. Tokunaga, “Chaos via Torus Breakdown,” *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-34, No. 3, pp.240–253, 1987.
- [14] R. FitzHugh, “Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane,” *Biophys. J.* **1**, pp.445–466, 1961.
- [15] 川上 博, 状態でみる回路のふるまい, 1998.
- [16] 小林 邦博・川上 博, 電気回路の過渡現象, 産業図書, 1991.
- [17] 志村 正道, 非線形回路理論, 昭晃堂, 昭和 44 年.
- [18] D. A. Linkens, “Analytical Solution of Large Numbers of Mutually Coupled Nearly Sinusoidal Oscillators,” *IEEE Trans. Circuits and Systems*, CAS **21**, pp.294–300 (1974).

- [19] S. P. Datardina and D. A. Linkens, "Multimode Oscillations in Mutually Coupled van der Pol Type Oscillators with Fifth-Power Nonlinear Characteristics," IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-25, pp.308–315, 1978.
- [20] T. Endo and S. Mori, "Mode Analysis of a Multimode Ladder Oscillators," IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-23, pp.100–113, 1976.
- [21] T. Endo and S. Mori, "Mode Analysis of a Ring of a Large Number of Mutually Coupled van der Pol Oscillators," IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-25, pp.7–18, 1978.
- [22] A. N. Bautin, "Qualitative investigation of a Particular Nonlinear System," PPM, **39**, pp.606–615, 1975.
- [23] O. Papy and H. Kawakami, "Symmetry Breaking and Recovering in a System of n Hybridly Coupled Oscillators," Trans. IEICE, E79-A, pp.1568–1574, 1996.
- [24] T. Ueta, and H. Kawakami. "Bifurcation and Chaos in Asymmetrically Coupled BVP Oscillators," ISCAS2002, Vol.3, pp.465–468, Scottsdale, Arizona, USA, May 2002.
- [25] T. Ueta, and H. Kawakami. "Bifurcation in Asymmetrically Coupled BVP Oscillators," International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.13, No.5, pp.1319–1327, June 2003.
- [26] T. Matsumoto, L. O. Chua and M. Komuro, "The Double Scroll," IEEE Trans. Circuits and Systems CAS-32, pp.798–818, 1985.
- [27] T. Matsumoto, M. Komuro, H. Kokubu, and R. Tokunaga, *Bifurcations*, Springer-Verlag, 1994.
- [28] O. Feo, G. M. Maggio and M. P. Kennedy, "The Colpitts Oscillator: Families of Periodic Solutions and their Bifurcations," International Journal of Bifurcation and Chaos, **10**, pp.935–958, 2000.
- [29] L. O. Chua, M. Komuro, and T. Matsumoto, "The Double Scroll Family," IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-33, pp.1073–1118, 1986.
- [30] エイブラハム/ショー 共著 東保光彦 訳, ダイナミクス -力学系 ふるまいの幾何学 上, 現代数学社, 1989 年.
- [31] エイブラハム/ショー 共著 東保光彦 訳, ダイナミクス -力学系 ふるまいの幾何学 下, 現代数学社, 1989 年.
- [32] Y-C. Lai, "Pseudo-riddling in chaotic systems" Physica D 150, 2001.
- [33] Y-C. Lai, C. Grebogi, J.A. Yorke, S.C. Venkataramani, "Riddling Bifurcation in Chaotic Dynamical Systems" Phys. Rev. Lett. 77, 55, 1996.
- [34] Y-C. Lai, R.L. Winslow, "Riddled Parameter Space in Spatiotemporal Chaotic Dynamical Systems" Phys. Rev. Lett. 72, 1640, 1994.
- [35] H. W. Broer, H. M. Osinga and G. Vegter, "Algorithms for computing normally hyperbolic invariant manifolds," Z. angew. Math. Phys., Vol. 48, pp.480–524, 1997.

-
- [36] B. Krauskopf and H. M. Osinga and , “Two-dimensional global manifolds of vector fields,” *Chaos*, Vol 9(3), pp.768-774, 1999.
 - [37] B. Krauskopf and H. M. Osinga and , “Growing 1D and quasi 2D unstable manifolds of maps,” *J. Comput. Phys.*, Vol 146(1), pp.404-419, 1998.
 - [38] 伊理 正夫, 藤野 和建, 数値計算の常識, 共立出版株式会社, 昭和 60 年.

本研究に関連する原著論文

- [1] Y. Nishiuchi, T. Ueta, H. Kawakami, “Stable Torus and its Bifurcation Phenomena in a Simple Three-Dimensional Autonomous Circuit,” *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol.27, No.4, pp.941–951, Mar. 2006.

本研究に関連する国際会議

- [1] Y. Nishiuchi, T. Ueta, H. Kawakami, “On Basin Boundary of the Extended BVP Oscillator,” *International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2002)*, Vol.1, pp.311–314, Xi'an, PRC, Oct. 2002.
- [2] Atsushi Tsuda, Yusuke Nishiuchi, Akinori Tuji, Tetsushi Ueta, “Applications of non-linear signal processing by DSP,” *International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, Vol.2, pp.1009–1012, Xi'an, PRC, Oct. 2002.
- [3] Y. Nishiuchi, T. Ueta, H. Kawakami, “On a Stable Torus in a Three Dimensional Autonomous System,” *European Conference on Circuit Theory and Design (EC-CTD2003)*, Vol.1, pp.82–85, Cracow, Poland, Sept. 2003.
- [4] Y. Nishiuchi, T. Ueta, H. Kawakami, “A Blurred Boundary and its Manifolds in the Extended BVP Oscillator,” *RISP International Workshop on Nonlinear Circuits and Signal Processing (NCSP2004)*, pp.515–518, Honolulu, Hawaii, USA, March. 2004.
- [5] Y. Nishiuchi, S. Tsuji, T. Ueta, H. Kawakami, “On Synchronization in Cross Coupled BVP Oscillators,” *RISP International Workshop on Nonlinear Circuits and Signal Processing (NCSP2005)*, pp.109–112, Honolulu, Hawaii, USA, March. 2005.
- [6] Y. Nishiuchi, T. Ueta, H. Kawakami, “Bifurcation phenomena of capacitive coupled BVP oscillators,” *RISP International Workshop on Nonlinear Circuits and Signal Processing (NCSP2006)*, pp.243–246, Honolulu, Hawaii, USA, March. 2006.

本研究に関連する学会研究会資料等

- [1] 西内 悠祐, 上田 哲史, 川上 博, “変形 BVP 発振器にみられる特異な応答とその Basin Boundary について,” *電子情報通信学会技術研究報告*, Vol.NLP2002, No.15, pp.45–50, Jun., 2002.
- [2] 津田 淳志, 西内 悠祐, 辻 明典, 上田 哲史, “DSP を用いた非線形信号処理応用,” *電子情報通信学会技術研究報告*, Vol.NLP2002, No.9, pp.7–12, Jun., 2002.
- [3] 西内 悠祐, 上田 哲史, 川上 博, “変形 BVP 発振器でみられるトーラス,” *電気関係学会四国支部連合大会講演論文集*, pp.13, Oct., 2003.
- [4] 西内 悠祐, 上田 哲史, 川上 博, “変形 BVP 発振器における引力圏形成モデル,” *電子情報通信学会技術研究報告*, Vol.NLP2003, No.3, pp.13–18, May, 2003.
- [5] 西内 悠祐, 上田 哲史, 川上 博, “単純な 3 次元自律系に生じるトーラス,” *電子情報通信学会技術研究報告*, Vol.NLP2003, No.52, pp.41–46, Sep., 2003.

- [6] 西内 悠祐, 上田 哲史, 川上 博, “ネットワークルータの輻輳制御における非線形性の導入,” 電子情報通信学会ソサイエティ大会講演論文集, Vol.A, Sep., 2004.
- [7] 西内 悠祐, 上田 哲史, 川上 博, “変形 BVP 発振器でみられる引力圏境消失について,” 平成 17 年度電気関係学会四国支部連合大会講演論文集, pp.10, Oct., 2005.
- [8] 西内 悠祐, 上田 哲史, 太田 能, “非線形曲線を導入したネットワークルータにおける輻輳制御,” 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.NLP2004, No.107, pp.43–48, Jan., 2005.
- [9] 西内 悠祐, 上田 哲史, 川上 博, “Bifurcation and Chaos in Simplification Circuit of v-i Coupled BVP Oscillators,” 平成 18 年度電気関係学会四国支部連合大会講演論文集, No.17-4, pp.300, Sep., 2006.